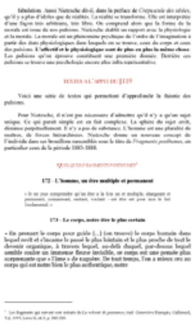
Notes (de COURS

ANNE-FRANÇOISE SCHMID

LA DÉMONSTRATION



Philopsis

Philopsis éditions numériques
http://www.philopsis.fr

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Ce texte est une sorte de triptyque qui tourne autour du concept de démonstration.

Dans un préambule, un débat classique (Descartes, Leibniz) est présenté sous forme de dialogue fictif, qui engage un ensemble de notions permettant d'appréhender celle qui nous occupe. Nous verrons que, philosophiquement, la question de la démonstration engage tout un ensemble de décisions.

Dans le premier chapitre, nous verrons que, du point de vue de l'épistémologie contemporaine, la question philosophique de la démonstration ne peut être développée sans un certain nombre de connaissances sur les théories, la forme des lois scientifiques, le concept de déduction, et le théorème de la déduction. Il faut donc un certain nombre de connaissances pour comprendre le concept de démonstration. C'est ce qui sera présenté au début de ce texte, et qui explique un certain nombre de « rappels » (théorie, loi scientifique). Nous verrons qu'il y a des liens entre la déduction et la démonstration, quoiqu'elles ne s'identifient pas. Ils permettent d'expliquer en quoi consiste une démonstration dans un système hypothético-déductif.

Dans un second chapitre, quelques indications seront données pour l'interprétation de deux grands débats philosophiques autour de la démonstration :

Peut-on accepter le raisonnement par l'absurde ? Les positions intuitionnistes et constructivistes pensent qu'il n'est pas acceptable en mathématiques ;

La démonstration est-elle d'ordre logique ou mathématique ? Ces deux question sont liées, les « intuitionnistes » pensant souvent que la démonstration est d'abord mathématique. Ce débat sera illustré par l'analyse de la polémique entre Henri Poincaré et Bertrand Russell sur la logique mathématique, qui concerne l'interprétation de la démonstration par induction.

Ces trois pièces du triptyque peuvent être lus dans l'ordre que l'on voudra. Néanmoins, le premier chapitre est techniquement nécessaire pour comprendre ce qu'est une démonstration.

Il y a évidemment des échos entre ces trois parties. La différence entre logique et mathématique, raisonnement logique et évidence, logistique et intuition, etc… se retrouvent entre le préambule (Leibniz, Descartes) et dans la polémique (Russell, Poincaré). Il y a une recherche de l'invention mathématique chez Poincaré et Badiou, mais sur des thèses opposées. Il importe de lire ce triptyque en recherchant ces échos, la difficulté de la compréhension de la démonstration n'en sera que mieux aperçue.

PREAMBULE : UN DEBAT CLASSIQUE, LA LOGIQUE ET L'EVIDENCE

Encore une remarque : les classiques ont eux aussi beaucoup réfléchi à la déduction et à la démonstration. Même si la logique contemporaine a éclairci beaucoup d'aspects de la démonstration, les considérations, même antiques, sur la question de la démonstration sont déterminantes (voir le texte d'Alain Chauve).

Quelques pages recommandées :

Herbert H. Knecht, *La logique chez Leibniz, Essai sur le rationalisme baroque*, Lausanne, L'Âge d'Homme, 1981, pp. 197-205, il y a tout un développement très intéressant sur la déduction et la démonstration chez Leibniz, et d'autres. Cela vaut la peine de lire ces quelques pages, et les notes qui vont avec ce chapitre — c'est une collection que l'on doit pouvoir trouver en bibliothèque.

On peut lire aussi de Louis Couturat, *La logique de Leibniz*, Paris, Alcan, 1901, qui est un grand classique. Et Aristote, bien entendu…

Sur cette question, il y a la classique différence entre Leibniz et Descartes (non pas un dialogue historique, comme les deux polémiques (géométrie, logique) entre Poincaré et Russell — voir le chapitre 2 —, puisque Descartes est mort lorsque Leibniz avait quatre ans). Nous verrons que dans ces débats, ce qui est en jeu, c'est la conception de la vérité.

Voici une sorte de répétition de ce débat entre Descartes et Leibniz, tel que je l'ai reconstitué à travers mes lectures. On y verra que la question de la déduction et de la démonstration est prise dans des postures philosophiques beaucoup plus larges. Plus tard, la logique mathématique a spécifié ces questions, et posé des relations plus formelles entre déduction et démonstration, mais qui ne suppriment pas les débats philosophiques. Simplement, avec la logique mathématique, on verra un affaiblissement du concept de vérité, réduit au « vrai » (théorie déflationniste, ou décitationnelle, de la vérité — sur ces sujets, il y a d'excellents articles dans l'Encyclopédie philosophique de l'Université de Stanford, en ligne : (http://plato.stanford.edu/entries/truth-deflationary/). Je vais en donner deux exemples, en dégageant les structures que supposent de telles idées de la vérité comme en un dialogue entre Descartes et Leibniz, dialogue tout à fait théorique, puisque Descartes est mort en 1650 et Leibniz est né en 1646. Il s'agit d'une promenade dans leurs œuvres, propre faire voir leur traitement systématique de la question de la vérité. Il ne s'agit évidemment pas d'une analyse de philosophies du 17ème siècle[1].

« Mais, chaque fois que deux hommes portent sur la même chose des jugements contraires, il est sûr que l'un ou l'autre au moins se trompe. Aucun des deux ne semble même avoir de science, car, si les

[1] Il y a un classique sur la critique leibnizienne de Descartes : Yvon Belaval, *Leibniz critique de Descartes*, Paris, Gallimard, 1960, 559 p.

raisons de l'un étaient certaines et évidentes, il pourrait les exposer à l'autre de manière à finir par convaincre son entendement. » (*Regulae ad directionem ingenii*, II).

« Quo facto, quando orientur controversiae, non magis disputatione opus erit inter duos philosophos, quam inter duos Computistas. Sufficiet enim calamos in manus sumere sedereque ad abacos, et sibi mutuo (accito si placet amico) dicere : Calculemus ! » Texte rapporté par Louis Couturat dans La Logique de Leibniz, Paris, Alcan 1901, p. 98). « De fait, lorsque s'élève une controverse entre deux philosophes, la dispute n'est pas plus forte qu'entre deux calculateurs (Computistas). Il suffit en effet que chacun prenne sa plume et s'assoie à l'abaque, et qu'ils se disent l'un à l'autre (si du moins ils trouvent un accord amical pour se retrouver) : Calculons ! »

Ces deux points de vue sur le désaccord peuvent paraître au premier regard assez semblables. Il y a des façons de faire cesser la controverse, pour l'un en exposant des raisons certaines et évidentes, pour l'autre en invitant l'ami philosophe à venir s'installer à la table à calcul. Et pourtant ces deux approches sont très différentes, le calcul permettant l'analyse de raisons à l'infini.

« … il n'arrive rien d'inintelligible, excepté que nous ne saurions démêler tout ce qui entre dans nos perceptions confuses, qui tiennent même de l'infini, et qui sont des expressions du détail de ce qui arrive dans les corps. » (*Nouveaux Essais sur l'entendement humain*, Préface).

« *Contingentiae radix est infinitum. Veritas contingens est, quae est indemonstrabilis* » (« La racine de la contingence est l'infini. Une vérité est contingente lorsqu'elle n'est pas susceptible de démonstration ») (Texte rapporté par Louis Couturat dans *La Logique de Leibniz*, Paris, Alcan 1901, p. 212).

On comprend alors que l'accord de deux philosophes ne peut se conclure par la clarté et l'évidence.

Ces deux points de vue ont quelque chose à voir avec la vérité correspondance pour le premier, avec la vérité cohérence pour le second. Nous allons montrer dans la suite de ce chapitre, en mettant en évidence les traits distinctifs, en quoi ces conceptions seront importantes pour nos problèmes contemporains. Je vais procéder en alternant des fragments de textes, qui donnent autant de facettes à notre problème.

Descartes

Aucune vérité, aucune créature n'est concevable sans Dieu :

« Dieu ne ferait pas paraître que sa puissance est immense, s'il créait des choses telles que par après elles peuvent exister sans lui ; mais, au contraire, il montrerait par là qu'elle est finie, en ce que les choses qu'il aurait une fois créées ne dépendraient plus de lui pour être » (A Hyperaspites, cité par M. Guéroult, *Descartes selon l'ordre des raisons*, tome 2, p. 27, note 13).

Leibniz

« *Nam etsi Deus nullus esset, modo possibile maneret nos existere, non ideo minus essemus capaces veri…* » (« Même s'il n'y avait aucun Dieu, et pourvu qu'il restât possible que nous existions, nous ne serions pas moins capables de vrai… ») (*Animadversiones in partem generalem Principiorum Cartesianorum*…, 13). Ce texte se trouve dans le 4ème tome de l'édition C. J. Gerhardt, *Leibniz gegen Descartes und der Cartesianismus*, Berlin, 1880, pp. 350-366.

Descartes

La création par Dieu des vérités éternelles :

« … les vérités mathématiques, lesquelles vous nommez éternelles, ont été établies de Dieu et en dépendent entièrement, aussi bien que tout le reste des créatures. C'est en effet parler de Dieu comme d'un Jupiter ou d'un Saturne, et l'assujettir au Styx et aux destinées, que de dire que ces vérités sont indépendantes. » (Lettre à Mersenne, 15 avril 1630).

« Pour la difficulté de concevoir comment il a été libre et indifférent à Dieu de faire qu'il ne fût pas vrai, que trois angles d'un triangle fussent égaux à deux droits, ou généralement que les contradictoires ne peuvent être ensemble, on la peut aisément ôter, en considérant que la puissance de Dieu ne peut avoir aucunes bornes ; puis aussi, en considérant que notre esprit est fini, et créé de telle nature, qu'il peut concevoir comme possibles les choses que Dieu a voulu être véritablement possibles, mais non pas de telle, qu'il puisse aussi concevoir comme possibles celles que Dieu aurait pu rendre possibles, mais qu'il a toutefois voulu rendre impossibles. » (lettre au Père Mesland, 2 mai 1644 ?)[le point d'interrogation est de l'éditeur].

« … parce qu'il s'est déterminé à faire les choses qui sont au monde, pour cette raison, comme il est dit en la Genèse, *elles sont très bonnes*, c'est-à-dire que la raison de leur bonté dépend de ce qu'il les a ainsi voulu faire. » (*Réponses aux objections*, VI, 8).

Ainsi les vérités éternelles sont les essences (lettre à Mersenne, 27 mai 1630, début).

Leibniz

Selon Leibniz, Descartes soumet l'entendement à la volonté.

« Ainsi, disant que les choses ne sont bonnes par aucune règle de bonté, mais par la seule volonté de Dieu, on détruit, ce me semble, sans y penser, tout l'amour de Dieu et toute sa gloire. Car pourquoi le louer de ce qu'il a fait, s'il serait également louable en faisant tout le contraire ? Où sera donc sa justice et sa sagesse, s'il ne reste qu'un certain pouvoir despotique, si la volonté tient lieu de raison, et si, selon la définition des tyrans, ce qui plaît au plus puissant est juste par là même ? » (*Discours de métaphysique, II*).

« Mais d'en attribuer l'origine au bon plaisir de Dieu, c'est ce qui ne paraît pas trop convenable à celui qui est la suprême raison, chez qui tout est réglé, tout est lié. Ce bon plaisir ne serait pas même *bon*, ni *plaisir*, s'il n'y avait pas un parallélisme perpétuel entre la puissance et la sagesse de Dieu. » (*Nouveaux Essais…,*IV, III, 9).

« Et quant au bon plaisir du créateur, il faut dire qu'il est réglé selon les natures des choses, en sorte qu'il n'y produit et conserve que ce qui leur convient et qui se peut expliquer par leurs natures, au moins en général… » (*Nouveaux Essais*…, IV, III, 7).

Dieu est donc soumis au principe de non-contradiction, et n'aurait pu le créer par un effet de son libre-arbitre.

« Ainsi on peut dire que, de quelque manière que Dieu aurait créé le monde, il aurait toujours été régulier et dans un certain ordre général. Mais Dieu a choisi celui qui est le plus parfait, c'est-à-dire celui qui est en même temps le plus simple en hypothèses, et le plus riche en phénomènes, comme pourrait être une ligne de géométrie dont la construction serait aisée et les effets seraient fort admirables et d'une grande étendue. » (*Discours de métaphysique,* VI).

Descartes

La théorie de la création des vérités éternelles rend le monde intelligible à l'homme.

« Or il n'y en a aucune [de vérité] en particulier que nous ne puissions comprendre si notre esprit se porte à la considérer, et elles sont toutes *mentibus nostris ingenitae*… » (Lettre à Mersenne, 15 avril 1630).

« Et ainsi je reconnais très clairement que la certitude et la vérité de toute science dépend de la seule connaissance du vrai Dieu : en sorte qu'avant que je le connusse, je ne pouvais savoir parfaitement aucune autre chose. » (*Méditations métaphysiques*, V, fin).

La « règle des vérités » est « la faculté qu'il [Dieu] nous a donnée » (*Principes…*, I, 30) et que Descartes appelle *intuitus mentis* dans une lettre à Mersenne (16 octobre 1939).

« Si quelqu'un donc veut sérieusement rechercher la vérité, il ne doit pas faire choix d'une science particulière : elles sont toutes unies entre elles et dépendantes les unes des autres. Qu'il pense seulement à accroître la lumière naturelle de sa raison, non pour résoudre telle ou telle difficulté d'école, mais pour que, dans chaque circonstance de sa vie, son entendement montre à sa volonté ce qu'il faut choisir… » (*Regulae…*, I).

Leibniz

Leibniz admet la différence de nature entre les idées de Dieu et les nôtres, mais suppose qu'elles « conspirent » (« Tout est conspirant » selon une formule d'Hippocrate traduite par Leibniz *Nouveaux Essais…*, Préface), sans qu'il y ait solution de continuité (« *Natura non facit saltus* », qui est le principe de continuité) :

« … lorsque Dieu nous manifeste une vérité, nous acquérons celle qui est dans son entendement, car quoiqu'il y ait une différence infinie entre ses idées et les nôtres quant à la perfection et à l'étendue, il est toujours vrai qu'on convient dans le même rapport. » (*Nouveaux Essais…*, IV, V, 2).

« Je soutiens … qu'enfin la conception des créatures n'est pas la mesure du pouvoir de Dieu, mais que la conceptivité ou force de concevoir est la mesure du pouvoir de la nature ; tout ce qui est conforme à l'ordre naturel pouvant être conçu ou entendu par quelque créature. » (*Nouveaux Essais…*, Préface).

Il y a une différence entre les créatures, dont le critère est une connaissance plus ou moins consciente d'elle-même (*La Monadologie*, § 84). Mais tous les ordres de créatures sont harmoniques entre eux (*La Monadologie*, § 78, 79, 87). D'où l'idée d'une « Harmonie préétablie ».

La lumière est d'abord celle de Dieu : « Dieu est le soleil et la lumière des âmes, *lumen illuminans omnem hominem venientem in hunc mundum*» (*Discours de métaphysique*, XXVIII) (« lumière illuminant tout homme venant en ce monde »).

Les créatures ont donc des idées plus ou moins claires, plus ou moins confuses, et tout cet ensemble est harmonieux. Il n'est pas nécessaire de faire une différence de nature entre les hommes et les animaux ; certains ont simplement une conscience endormie, mais qui n'en « conspire » pas moins. Alors que chez Descartes, tout homme, s'il y met assez d'attention, doit pouvoir se faire une idée claire et distincte des vérités, et cela le distingue radicalement des animaux.

Descartes

Il y a donc une intuition. L'intuition est

« le concept que l'intelligence pure et attentive forme avec tant de facilité et de distinction qu'il ne reste absolument aucun doute sur ce que nous comprenons ; ou bien, ce qui est la même chose, le concept que forme l'intelligence pure et attentive, sans doute possible, concept qui naît de la seule lumière de la raison et dont la certitude est plus grande, à cause de sa plus grande simplicité, que celle de la déduction elle-même… » (*Regulae*…, III).

« Nous avons déjà dit que c'est dans la seule intuition des choses, soit simples, soit liées, qu'il ne peut y avoir d'erreur. » (*Regulae*…, XIII).

Leibniz

Ce n'est pas l'intuition qu'il nous faut mais un « fil d'Arianne », un *filum cognoscendi* ou un *filum meditandi*, permettant de voir dans toutes les erreurs des erreurs de calcul. Cela suppose que l'on fasse usage de « caractères », de symboles qui aident au raisonnement. C'est la « caractéristique universelle » de Leibniz. Seul Dieu peut voir par intuition. L'homme n'est pas capable d'intuition, il conçoit les choses et les vérités discursivement.

« Ce qui fait qu'il a été plus aisé de raisonner démonstrativement en mathématiques, c'est en bonne partie parce que l'expérience y peut garantir le raisonnement à tout moment, comme il arrive aussi dans les figures des syllogismes. Mais dans la métaphysique et la morale, ce parallélisme des raisons et des expériences ne se trouve plus ; et dans la physique les expériences demandent de la peine et de la dépense. Or les hommes se sont d'abord relâchés de leur attention, et égarés par conséquent, lorsqu'ils ont été destitués de ce guide fidèle de l'expérience qui les aidait et soutenait dans leur démarche, comme fait cette petite machine roulante qui empêche les enfants de tomber en marchant[2]. Il y avait quelque *succedaneum*, mais c'est de quoi on ne s'était pas et on ne s'est pas encore avisé assez. » (*Nouveaux Essais*…, IV, II, 13).

Descartes

Si l'intuition est bonne, il n'y a que faire des règles compliquées de la logique et de la syllogistique.

« Par ces préceptes ils [les Dialecticiens] croient régir la raison humaine en lui prescrivant certaines formes de raisonnement si nécessairement enchaînées que la raison qui s'y confie, bien qu'elle aille en quelque sorte jusqu'à bannir l'évidence et l'attention de l'inférence elle-même, peut néanmoins, en vertu de la forme, conclure parfois à quelque chose de certain. C'est qu'en effet nous remarquons que la vérité s'échappe souvent de ces liens, alors que cependant ceux-là mêmes qui s'en servent y demeurent enlacés… Aussi bien est-ce surtout pour éviter ici que notre raison ne se donne congé pendant l'examen de quelque vérité, que nous rejetons ces formes logiques comme contraires à notre but… » (*Regulae*…,

[2] On trouve également cette image chez Kant à propos de l'exemple, qui est une telle petite machine dans le discours.

X). Voir aussi la fin des *Réponses aux objections…*, II. [Ce doit être la traduction de J. Sirven chez Vrin]

Leibniz

Sur la logique :

« Je tiens que l'invention de la forme des syllogismes est une des plus belles de l'esprit humain, et même des plus considérables. C'est une espèce de mathématique universelle dont l'importance n'est pas assez connue ; et l'on peut dire qu'un art d'infaillibilité y est contenu, pourvu qu'on sache et qu'on puisse bien s'en servir, ce qui n'est pas toujours permis. » (*Nouveaux Essais…*, IV, XVII, 4).

Descartes

L'ordre et la méthode sont donc plus importants que la logique, il faut suivre la lumière naturelle et ne pas donner congé à sa raison, de façon à ne pas prendre pour composé et difficile ce qui est simple et évident.

« Ce n'est pas en vain que nous faisons ici cette remarque, parce que souvent les lettrés ont coutume d'être si ingénieux qu'ils trouvent moyen de n'y voir goutte, même dans ce qui est évident par soi et que les gens incultes n'ignorent jamais. C'est ce qui leur arrive toutes les fois qu'ils tentent d'éclaircir ces objets connus par eux-mêmes au moyen de quelque chose de plus évident : en effet, ils expliquent autre chose ou rien du tout… Ne paraissent-ils pas proférer des paroles magiques, ayant une force occulte et dépassant la portée de l'esprit humain, ceux qui disent que le *mouvement*, chose très connue de chacun, *est l'acte de l'être en puissance, en tant qu'il est en puissance* ? Qui comprend en effet ces mots ? qui ignore ce qu'est le mouvement ? Et qui n'avouerait pas que ces hommes ont cherché un nœud sur un jonc ? » (*Regulae…*, XII).

Pour délivrer nos idées de tout ce fatras, il faut procéder au doute méthodique, de telle façon que ce qui résiste au doute puisse être le modèle de toute certitude, le *Cogito.*

Leibniz

Le doute méthodique ? *Crepundium* ! (jouet, hochet) (Lettre à Swelingius — tome IV déjà cité de l'édition Gerhardt, pp. 325-330). Plus, il conduit à rejeter les choses douteuses comme fausses :

« …rejectionem omnium de quibus dubitare licet, inter phaleras ad populum numero » (ibid.) (« le rejet de tout ce dont on peut douter, je le compte comme du clinquant pour le peuple »). « Caeterum non video quid prosit dubia habere pro falsis : hoc foret non exuere praejudicia, sed mutare. » (*Animadversiones in partem generalem Principiorum Cartesianorum*, I, 2) (« Par ailleurs je ne vois pas en quoi peut être utile

l'idée de compter les choses douteuses parmi les fausses : cela ne nous fait pas sortir des préjugés, mais en changer. »).

Ce qui compte, ce sont les démonstrations (voir *Animadversiones in partem generalem Principiorum Cartesianorum*, I, 5). Quoi qu'il en soit, il ne suffit pas de maintenir notre attention et notre mémoire, de veiller à ne pas donner congé à la raison.

Le *Cogito* ? Une proposition de fait, fort banale d'ailleurs, une de ces *phalerae ad populum*.

« Cependant vous pouvez exclure cette proposition (le *Cogito*) du nombre des axiomes avec quelque raison, car c'est une proposition de fait, fondée sur une expérience immédiate et ce n'est pas une proposition nécessaire, dont on voie la nécessité dans la convenance immédiate des idées. Au contraire, il n'y a que Dieu qui voie comment ces deux termes, *moi* et l'*existence*, sont liés, c'est-à-dire pourquoi j'existe. » (*Nouveaux Essais…*, IV, VII, 7). De plus le *Cogito* n'est pas la seule proposition primitive de fait, il y a encore le *varia a me cogitantur* (de multiples choses sont pensées par moi). « *Recte reprehensus est Cartesius, quod inter veritates quas initio rejiciendas censebat, etiam eas collocavit quarum oppositum contradictionem implicare constat. Nam ut experimenta interna sunt fundamentum omnium veritatum facti, ita principium contradictionis est principium omnium veritatum rationis, eoque sublato omnis tollitur ratiocinatio, neque quicquam vel de Deo vel de ulla re colligere licet. Itaque nihil fuit absurdius quam asserere mathematicas veritates non posse certo sciri nisi praecognito Deo…* » (Lettre à J. E. Swelingius). (« On a objecté justement à Descartes d'avoir placé parmi les vérités qu'il pensait dès le début devoir être rejetées même celle dont le contraire implique contradiction. De même que les expériences internes sont le fondement de toutes les vérités de fait, le principe de contradiction est le principe des vérités de raison, si bien que si on le supprime, il n'est pas possible de conclure quoi que ce soit sur Dieu ni sur aucune chose. Aussi rien ne fut plus absurde que d'affirmer que les vérités mathématiques ne pouvaient être connues avec certitude si ce n'est par la connaissance préalable de Dieu… »).

Descartes

Pour bien conduire sa raison, Descartes a fait le choix du simple[3]. Dieu a imprimé en nous des « natures simples », en dehors desquelles nous ne pouvons rien comprendre (*Regulae…*, XII). Trouvée cette simplicité, on peut conduire la raison avec méthode. Pour cela, il ne faut pas suivre la

[3] C'était aussi un choix de savant, non seulement de philosophe, certainement un choix très sage de son temps. Actuellement, on est souvent conduit à faire l'hypothèse inverse, celle de complexité, nécessitée par l'intrication des disciplines scientifiques dans le traitement d'un problème.

méthode des logiciens, mais celle des géomètres, qui consiste dans l'ordre analytique ou synthétique (*Réponses aux objections…,* II). C'est pourquoi l'intuition est le point de départ du raisonnement discursif, c'est elle qui vérifie les liaisons nécessaires existant entre les idées déduites les unes des autres (*Regulae…*, XII). L'intuition exige deux conditions « à savoir que la proposition soit comprise clairement et distinctement, qu'ensuite elle soit comprise tout entière à la fois et non successivement » (*Regulae…*, XI). Clarté et distinction dont le modèle est le *Cogito*.

« J'appelle claire celle qui est présente et manifeste à un esprit attentif ; de même que nous disons voir clairement les objets lorsque étant présents ils agissent assez forts, et que nos yeux sont disposés à les regarder ; et distincte, celle qui est tellement précise et différente de toutes les autres, qu'elle ne comprend en soi que ce qui paraît manifestement à celui qui la considère comme il faut. » (*Principes…*, 1, 45).

L'idée distincte peut encore être analysée (Voir l'*Entretien avec Burman,* Pléiade, p. 1362). On peut trouver des propriétés du triangle mille ans après, ce qu'admettra bien volontiers Leibniz : « C'est pourquoi j'ai coutume de suivre ici le langage de M. Descartes, chez qui une idée pourra être claire et confuse en même temps… » (*Nouveaux Essais…*, II, XIX, 4).

Leibniz

Il fait aussi le choix de la simplicité, mais il ne la reconnaît pas selon le critère de l'évidence, trop subjectif à son goût, la certitude ne peut dépendre de l'attention que nous pouvons consacrer à la vérité… Il faut un *filum cognoscendi*, qui suppose l'usage de la logique et la construction de chaînes de définitions ; « Les propositions identiques contiennent les premières vérités *a priori*, ou de raison, c'est-à-dire les premières lumières. » ….(*Nouveaux Essais…*, IV,IX,3). Ce qui importe est que l'on puisse analyser les vérités, car « *praedicatum inest subjecto* » (le prédicat est compris dans le sujet – tout le *Discours de métaphysique* est une suite de cette idée. Couturat, dans *La Logique de Leibniz* en a conclu que toute vérité était analytique. Cette expression n'est évidemment pas de Leibniz, par contre on peut dire de toute vérité qu'elle est analysable).

« Quand une vérité est nécessaire, on en peut trouver la raison par l'analyse, la résolvant en idées et en vérités plus simples, jusqu'à ce qu'on vienne aux primitives. C'est ainsi que chez les mathématiciens, les *théorèmes* de spéculation et les *canons* de pratique sont réduits par l'analyse aux *Définitions*, *Axiomes*, et *Demandes*. » (*La Monadologie*, § 33 et 34).

La différence entre les vérités nécessaires et les vérités contingentes est que, concernant ces dernières, l'analyse va à l'infini :

« Hinc veritatum necessarium a contingentibus idem discrimen est, quod Linearum occurrentium et Asymptotarum, vel Numerorum commensurabilium et incommensurabilium » (texte cité par Couturat, ibidem, p. 212) (« La règle de distinction entre les vérités nécessaires et les vérités contingentes est la même qu'entre les lignes occurrentes et les asymptotes ou encore qu'entre les nombres commensurables ou incommensurables »).

« Mais la *raison suffisante* se doit trouver aussi dans les *vérités contingentes ou de fait*, c'est-à-dire dans la suite des choses répandues par l'univers des créatures ; où la résolution en raisons particulières pourrait aller à un détail sans borne, à cause de la variété immense des choses de la Nature et de la division des corps à l'infini. Il y a une infinité de figures et de mouvements qui entrent dans la cause efficiente de mon écriture présente ; et il y a une infinité de petites inclinations et dispositions de mon âme, présentes et passées, qui entrent dans la cause finale. » (*La Monadologie*, 36).

Le monde de Leibniz est ainsi infiniment varié, il y a une infinité de mondes possibles, dont certains sont compossibles, parmi lesquels Dieu choisit le plus parfait (Voir *Essai de Théodicée*) (i.e. le plus pauvre en hypothèses et le plus riche en phénomènes).

Il y a donc continuité dans l'analyse, du plus clair au plus confus, continuité qui est celle aussi des âmes conscientes de leur raison aux corps affectés de perceptions sans conscience. Il y a une échelle des perceptions conscientes aux petites perceptions, imperceptibles isolément, comme tous les petits bruits qui composent le bruit de la mer. Leibniz est trop attentif à la fois à la richesse et à la continuité pour admettre les « natures simples » cartésiennes ni croire aux vertus de l'intuition et des quatre règles cartésiennes des *Regulae…*De cette continuité, Leibniz conclut que le problème dans l'analyse est de reconnaître la chose représentée : « … *rem repreasentatam agnoscere…* » (*Meditationes de Cognitione, Veritate et Ideis*, *passim*, tome IV de l'édition Gerhardt, pp. 422-426). Au contraire, Descartes parle de l'idée ; seule la véracité divine, critère extérieur à la pensée, assure la correspondance de nos idées avec les choses. Nos idées sont représentatives, et seul un esprit supérieur, capable de voir à la fois l'esprit pensant et les choses, pourrait s'assurer du bien-fondé de nos idées. Pour Leibniz, nos idées sont l'expression des vérités éternelles, des essences qui se trouvent dans l'entendement divin, et, à ce titre, nous ne pouvons en douter, puisque la structure de notre entendement est la même que celle de celui de Dieu. Il s'ensuit que l'ordre des choses et l'ordre de raisons ne sont pas séparés chez Leibniz comme chez Descartes. Pour Leibniz, l'ordre des raisons est celui de la logique traditionnelle (pour ce qui est de prouver), et aussi celui de l'analyse et de la synthèse (pour ce qui est d'inventer). Les notions distinctes « distinguent dans l'objet les marques qui le font connaître, ce qui en donne l'analyse ou définition… » (*Nouveaux Essais…*, II, XIX, 4). De ce point de vue, les préceptes de méthode de Descartes (n'admettre pour vrai que ce qui est évident, diviser en parties, procéder par ordre, énumérer parfaitement (voir les *Regulae…*), sont pour Leibniz à la fois banales (n'importe quel savant les suit) et subjectives (les cartésiens n'ont pas la même évidence sur l'âme et la pensée) (voir la Lettre à Swelingius).

« Quatuor Cartesianae Methodi Regulae quas repetit p. 100 et 101 non video quid habeant Cartesio proprium. Et parum abest ut dicam similes praecepto Chemici nescio cujus : Sume quod debes et operare ut debes, et habebis quod optas. Nihil admitte nisi evidenter verum (seu nisi quod debes admittere), divide rem in partes quot requiruntur (id est quod facere debes), procede ordine (quo debes), enumera perfecte (seu quae debes), prorsus ut quidam inter praecepta ponunt, Bonum esse appetendum, Malum fugiendum ; recte profecto, sed initia boni malique desiderantur » (Lettre à Swelingius). (« Je ne vois pas en quoi les quatre règles cartésiennes de la méthode sont propres à Descartes. Elles ne diffèrent que peu des préceptes de je ne sais plus quel chimiste : Prends ce que tu dois et opère comme tu dois, et tu obtiendras ce que tu recherches. N'admets rien qui ne soit évidemment vrai (c'est-à-dire rien si ce n'est ce que tu dois admettre), divise la question en autant de parties qu'elle le requiert (ce que tu dois faire), procède par ordre (par lequel tu dois procéder), énumère parfaitement (comme tu dois le faire), de telle façon que parmi tes préceptes ces deux soient posés, que le Bien doit être recherché, que le mal doit être fui ; tout cela est juste, mais on attend toujours des critères du bien et du mal . » (Lettre à Swelingius).

Ce qui, pour Leibniz, importe plus que la méthode sont les critères de la vérité, parmi lesquels le principe de contradiction. Mais Leibniz en ajoute deux autres. 1) Les phénomènes doivent être liés, ce qui est du reste l'idéal de la déduction que l'on peut faire lorsqu'il s'agit de vérités nécessaires. La liaison a ceci de remarquable que, qu'elle lie des vérités nécessaires, contingentes ou probables, elle est toujours nécessaire. « Ces liaisons sont même nécessaires quand elles ne produisent qu'une opinion… » (*Nouveaux Essais…*, IV, XVII, 3). 2) Le second critère, qui dépend en général du premier, est le succès des prévisions faites à partir des vérités particulières ou générales obtenues par induction :

« Le vrai *criterion* en matière des objets des sens est la liaison des phénomènes, c'est-à-dire la connexion de ce qui se passe en différents lieux et temps, et dans l'expérience de différents hommes, qui sont eux-mêmes les uns les autres des phénomènes très importants sur cet article. Et la liaison des phénomènes, qui garantit les *vérités de fait* à l'égard des choses sensibles hors de nous, se vérifie par le moyen des *vérités de raison*, comme les apparences de l'optique s'éclaircissent par la géométrie. » (*Nouveaux Essais…*, IV, II, 14). Et encore :

« … la vérité des choses sensibles se justifie par leur liaison, qui dépend des vérités intellectuelles, fondées en raison, et des observations constantes dans les choses sensibles même, lors même que les raisons ne paraissent pas. Et comme ces raisons et observations nous donnent le moyen de juger de l'avenir par rapport à notre intérêt et que le succès répond à notre jugement raisonnable, on ne saurait demander ni avoir même une plus grande certitude sur ces objets… » (*Nouveaux Essais…*, IV, XI, 10).

Chez Descartes, il y a donc une sorte de séparation de principe, du moins du point de vue de l'entendement humain, entre le monde des idées et l'ordre des choses. Il faut analyser les idées, trouver les natures simples, savoir les énumérer et les recomposer, et c'est Dieu qui garantit une correspondance avec le monde. En sciences, Descartes est tout à fait cohérent avec ce point de vue, la physique est dans le principe géométrisée, et l'expérience n'a que peu d'importance en physique. Chez Leibniz, dans l'analyse des idées, on trouve la chose représentée, si bien que l'expérience en physique est tout à fait importante. Chez l'un et l'autre, la vérité préexiste à la recherche du penseur, chez l'un et l'autre il importe de rechercher le simple, sans lequel il n'y a ni preuve ni invention. Chez l'un et chez l'autre l'idée de vérité suppose une sorte d'unité, soit par Dieu, soit par harmonie, entre la pensée et le monde. Ces grands systèmes classiques sont de magnifiques constructions pour faire tenir ensemble la pensée, le monde, la variété des phénomènes et les possibles. Pour faire tenir tout cela ensemble dans leur totalité, il faut clôturer le système de telle sorte que l'on se donne constamment soit les moyens d'une correspondance par Dieu chez Descartes soit celle d'une cohérence par l'Harmonie préétablie. La pensée humaine ne suffit pas à garantir la correspondance, ni à penser tous les possibles qui conspirent en l'harmonie, si bien que l'on est amené à une idée métaphysique de la vérité, qui outrepasse l'exercice de la pensée ou l'observation des vérités de fait. Descartes a pu faire tenir ensemble son système jusqu'à la médecine et l'examen des passions, Leibniz jusqu'à celles de la biologie, de la médecine, de la chimie, de la linguistique, de la logique.

Tenir tout cela ensemble supposait un grand principe : que la substance soit caractérisée par des attributs, qu'un sujet soit déterminé par des prédicats. Bref, de voir toute pensée comme la combinaison d'attributs rapportés à un sujet, ce qui est une interprétation particulière du verbe « être ». Leibniz a eu un destin particulier sur cette question. Il a d'une certaine façon généralisé et clôturé cette interprétation en soutenant que le prédicat était dans le sujet, et donc, qu'en analysant un sujet, on pouvait retrouver tous ses prédicats — quoique les vérités contingentes demandassent une analyse infinie. Mais d'autre part, il est l'initiateur d'une logique des relations, sur laquelle Couturat a beaucoup insisté, mais Russell a fait remarquer qu'il n'avait pu la poursuivre jusqu'au bout à cause de son *praedicatum inest subjecto*. Il était proche d'avoir des moyens d'analyse du raisonnement mathématique (pour lequel la relation sujet/prédicat est inadaptée). Le système supposait, avec les conceptions métaphysiques, une conception de la structure de la phrase ou de la proposition (comme on le dira plus tard). Cette conception allait de soi, parce qu'elle semblait être celle qui permettait au discours de rendre compte de l'objectivité des idées et de la diversité du monde sans les transformer ou les déranger. Mais cette correspondance, ce « parallélisme perpétuel », selon l'expression de Leibniz (pour qualifier les relations entre la sagesse et la puissance divines), supposait une thèse métaphysique, s'étendant à toutes les pensées et à tous les objets du monde.

Ces usages de la totalité, d'une correspondance garantie, d'une cohérence qui concerne l'ensemble des choses du monde, d'une structure du langage naturelle pour refléter spéculairement la pensée, l'idée de simplicité, celles de l'évidence, d'une distinction dans les idées seront toutes progressivement abandonnées et ne pourront à plus forte raisons être admises ensemble. Le système comme système ne pourra qu'imploser devant la diversification des sciences et le savoir de plus en plus clair de la variété des gestes philosophiques. Mais cela ne veut pas dire que ces systèmes soient « perdus ». Il sera possible de faire usage de certains aspects de leur caractérisation de la vérité, de les transformer en fonction de règles, de façon à donner des moyens pour comprendre ce que nous appelons « vérité ». C'est dans cette mesure qu'il m'a paru important de faire une place à cette sorte de dialogue impossible dans le temps et dans l'espace. Jusque chez les pragmatistes — au moins chez les premiers — on admettra que la vérité suppose un accord de la pensée et de l'objet.

L'histoire du concept de vérité sera celle de l'éclatement de tous ces ingrédients mis ensemble, mais d'une façon dispersée dans le temps. On pourra considérer qu'il n'y a pas de critères de la vérité universels et positifs et néanmoins admettre la forme prédicative du jugement. Identifier la métaphysique dans le passage à la totalité, plutôt que dans la forme grammaticale, logique ou rhétorique. Le 20ème siècle a vu la « réduction » de tous ces aspects, sous des formes différentes (il n'y a plus de formes universelles).

Néanmoins, une chose subsistera, qui est le lien entre l'idée de vérité en philosophie et en sciences. Même si chez Descartes les sciences séparées ne sont pas indépendantes, la méthode des géomètres est essentielle pour faire comprendre la vérité dans la philosophie. Même si Leibniz prend le plus grand soin à sauvegarder l'autonomie relative des diverses sciences et de la métaphysique, il n'est pas possible de comprendre la vérité sans faire usage de la logique, des probabilités, du calcul infinitésimal (lien des vérités contingentes et de l'infini), de l'harmonie préétablie et de l'idée mécanique de la conservation de la force vive (carré du mouvement, plutôt que du mouvement — comme chez Descartes), ainsi que l'a expliqué Poincaré[4]. La

[4] *La Monadologie*, édition annotée et précédée d'une Exposition du système de Leibniz par E. Boutroux, (suivie d'une Note terminale sur les principes de la Mécanique dans Descartes et dans Leibniz par H. Poincaré, Paris, Delagrave, 1925 (1ère éd. :?). Cette note est fort

notion de vérité philosophique trouve son étayage dans un passage par une autre discipline, scientifique mais aussi éventuellement théologique. Le rapport aux sciences est extrêmement intéressant. Elles servent d'étai technique de la vérité philosophique. Cet aspect technique fait que chaque philosophie cherche presque toujours un « ancrage » dans une discipline privilégiée : logique (Aristote, Leibniz), mathématiques (Descartes, Leibniz), physique (Kant) ; plus proche de nous théorie des ensembles (Alain Badiou) ; linguistique et psychanalyse (Derrida) ; biologie et chimie chez certains épistémologues (par exemple Stengers) ; mécanique quantique (van Fraassen, etc …). Il est très intéressant de voir que l'explicitation ou la justification de la vérité philosophique (ou ce qu'il en reste après toutes les réductions) passe par l'usage privilégié d'un *fragment* de science ou de discipline scientifique, qui fonctionne comme exemplaire des sciences. Cela pose des questions essentielles et principielles sur la façon d'identifier ce que l'on appelle « science ». Cela suggère aussi inévitablement qu'une vérité philosophique ne sera qu'une perspective parmi d'autres, non pas fondée sur la science, mais sur une pratique particulière donnée en exemple, selon un usage de la synecdoque — forme rhétorique, de celles que voulaient justement mettre à l'écart les conceptions classiques de la vérité. L'éclatement du système classique aura pour effet, très progressivement, de poser de façon nouvelle les relations entre les sciences et les philosophies, par-delà même ce que l'on appelle « la » philosophie des sciences.

---

intéressante, et met en relation l'idée que c'est non pas le mouvement, comme chez Descartes, mais le carré du mouvement, qui se conserve et la formation de l'idée de l'harmonie préétablie.

CHAPITRE 1 : DEDUCTION ET DEMONSTRATION

RAPPEL SUR LE CONCEPT DE THEORIE

Soit une théorie. Elle est susceptible de diverses définitions en fonction du niveau formel dont on a besoin. On peut dire par exemple que la théorie est un ensemble de mots ou d'expressions bien formées (ebf), dont on donne des règles de formation inductives[5] de telle façon que, pour tout mot, on puisse dire s'il est bien formé.

C'est un niveau un peu moins formel qui nous intéresse pour comprendre les liens entre démonstration et déduction. Pour avoir une théorie, il faut choisir un sous-groupe de théorèmes que l'on admet sans démonstration, qui sont assumés comme axiomes ou principes. Si l'on ne fait pas un tel choix, les démonstrations dans les théories seront circulaires, et on finira par trouver dans les hypothèses les conclusions que l'on cherche. Il y a une certaine liberté dans ce choix, néanmoins il faut choisir des propositions assez élémentaires pour ne pas compliquer la construction de la théorie. D'autre part, il faut également choisir un sous-groupe de notions sans définition, pour que l'ensemble des définitions ne renvoie pas les unes aux autres de façon circulaire à l'intérieur de la théorie. Cela ne signifie pas que les notions dites primitives (= admises sans définition) désignent n'importe quoi, car elle sont *indirectement définies par les axiomes ou les principes*.

Prenons un exemple, soit la théorie de Newton. Si nous admettons les notions de force ou de masse sans définition, les principes de la mécanique nous ferons éliminer d'office toute interprétation de ces notions non compatibles avec eux.

Cette approche de la théorie nous apprend au moins une chose, c'est que son rapport à l'empirique ou à l'expérience n'est pas immédiat. Les principes et les notions ne sont pas choisis en vertu d'une correspondance directe aux faits, comme le Cercle de Vienne a pu encore le penser dans les années 1930 (les « énoncés protocolaires », censés représenter des faits), mais en fonction d'une cohérence interne, en fonction de ce que l'on cherche dans l'exposé de la théorie, etc… Il y a une autonomie relative de la théorie par rapport à l'empirique — Einstein dira même qu'il y a un « logical gap » — un abîme logique — entre les faits et la théorie[6]. Poincaré

---

[5] Voir la note 9 pour le sens d'inductif.

[6] Albert Einstein, « On the Method of theoretical Physics », Conference Herbert Spencer, Clarendon Press, 1933. Il faut à la fois un empirisme extrême dans l'attention aux faits, et

voyait une continuité entre les faits et les théories (cette différence épistémologique se voit dans leurs théories de la relativité), et pourtant il montrait comment une généralisation scientifique demandait une « décomposition » entre ce qui, du fait, peut être écrit en termes mathématiques (algèbre, analyse, géométrie), et ce qui reste de l'ordre du phénomène perturbateur[7]. Sans cette décomposition qui est à chaque fois une hypothèse, il ne serait pas possible de mettre sous forme mathématique ce qui est expérimental. Elle fait que les principes sont hors de portée de l'expérience et que la vérification d'une théorie ne peut être faite que sur des groupes d'hypothèses, et non pas précisément sur telle conclusion que l'on cherche à vérifier, justement parce que cette conclusion n'est pas isolée, mais dépend d'hypothèses et d'ensembles théoriques. Il y a donc chez Poincaré une complémentarité étroite entre les faits et la théorie, et l'expérience est l'unique source de la vérité, néanmoins, il y a une autonomie de la théorie, la physique mathématique a sa valeur à côté de la physique expérimentale.

Si l'on veut vérifier une théorie — il faut bien savoir qu'on n'y arrive jamais tout à fait —, ou un groupe d'hypothèses de la théorie, ou une conséquence déduite des principes ou des axiomes, la procédure sera indirecte, comme on le sait depuis les débuts de la science moderne[8]. Pour faire une expérience, il faut un modèle de la théorie — modèle qui permet en l'occurrence l'application. Par exemple, Newton utilisait le modèle dit des « forces centrales », qui suppose que l'on peut appliquer les principes de Newton en réduisant les masses célestes à leur point central et que les forces s'exercent le long des droites qui joint ces points. Plus tard, on a vu la théorie comme une syntaxe ou un système formel, et les modèles comme des domaines d'objets. Si la théorie est construite selon des procédures

---

une grande liberté dans la construction théorique, dont Einstein souligne le « fictitious character ».

[7] Henri Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, Paris, Flammarion, 1902, p. 193.

[8] Galilée savait très bien qu'il n'y avait aucun sens à vouloir vérifier sa théorie de la chute des corps contre celle des aristotéliciens en lâchant deux masse d'une tour — celle de Pise, a-t-on raconté après sa mort (cette recherche historique a été faite par Alexandre Koyré). Galilée en fait la remarque très clairement dans l'un de ses dialogues. Qu'une masse parvienne au sol avant ou après l'autre pourra être réinterprété en disant que la tour est trop ou pas assez haute pour prouver ce que l'on a à mettre en évidence. L'un des objectifs de Galilée était de montrer que la chute des corps était indépendante du frottement de l'air, contrairement à ce que pensait la physique aristotélicienne, reposant sur l'observation et non sur l'expérimentation. Galilée ne niait pas le frottement de l'air, il était un fait, mais un fait non pertinent pour la question. Il ne pouvait alors vérifier sa loi que par des moyens indirects et expérimentaux (non pas d'observation), dont il a inventé deux bien connus, le plan incliné et l'analogie avec le mouvement du pendule, qui tous deux ont été beaucoup discutés dans la tradition. Le fait que sa théorie ait permis également d'unifier la physique sublunaire et la physique céleste d'Aristote a aussi été un argument indirect important pour sa validité.

inductives[9], qui garantissent la bonne formation des expressions, alors on peut construire des applications (au sens mathématique) entre les termes de la théories et les objets du domaine. Dans ce cas, le modèle est compris comme une *interprétation vraie* de la théorie. L'expérience, construite en tenant compte du modèle, pourra dire si telle conséquence de la théorie est vraie ou non (V,F, ou 1,0), à la nuance près dite plus haut, que l'on ne peut savoir, au moins directement, ce qui est effectivement vérifié ou réfuté. On peut d'ailleurs multiplier les valeurs, faire des logiques modales, ou non-classiques, ou plurivalentes, ou floues, ou para-consistantes, etc., cela n'empêche pas de construire un modèle et de raisonner de façon semblable pour la suite. Nous conserverons donc le cas le plus simple {V,F} ou {1,0}.

Il manque encore une chose aux théories telles que nous les avons caractérisées : il faut des règles de déduction (que l'on choisit aussi). Elles permettent de déduire des conséquences d'un ensemble d'hypothèses, ou encore de montrer qu'une conséquence dépend d'une hypothèse ou d'un groupe d'hypothèses. La relation entre les hypothèses et les conclusions est une relation d'ordre partiel (partiel, parce que l'on peut répéter une hypothèse : il se peut que les hypothèses 1 à *n* ne se suivent pas dans l'ordre 1, 2, 3,…, *n*, …, mais avec des répétitions 1, 2, 3, 1, 4, …, ce qui fait que l'ordre n'est plus « strict »[10]).

Un autre aspect à expliciter — l'un des plus difficile à saisir — est que les axiomes, ou les principes, ou les hypothèses, ne sont pas vrais. Ils ne sont pas posés comme faux non plus. Du faux, on peut tirer n'importe quoi,

---

[9] Attention, cela ne veut pas dire qu'elle ait été établie par induction, en généralisant à partir des faits. Cela signifie que l'on a donné une définition inductive, au sens mathématique, des expressions bien formées. La définition inductive a *grosso modo* la forme suivante :

Tel « objet » a la propriété A

Si cet « objet » a la propriété A, alors « objet » opération * a la propriété A (clause inductive ou « pas d'induction »)

Rien n'a la propriété A si ce n'est par ce qui précède (clause finale).

Ce mode de définition permet ensuite de raisonner par induction sur cet ensemble, on peut raisonner sur le nombre de « pas » d'une induction. Cette procédure permet de « contrôler » ce que l'on met dans la théorie. Dans un second temps, elle permet d'examiner les propriétés métalogiques de la théorie, à savoir si elle est consistante (ne comporte pas de contradiction), complète (si toute proposition vraie est démontrable), décidable (si l'on a une procédure pour distinguer parmi les ebf celles qui sont des théorèmes).

[10] Plus précisément, si nous avons (verticalement) une suite de pas d'une déduction ou d'une démonstration :

1	A		Hyp
2		B	Hyp
3		A	Hyp rep
4			

etc.

On peut ainsi répéter l'hypothèse A sous une nouvelle hypothèse B. Les pas 1 et 3 comportent l'Hyp A. La déduction ou la démonstration ne suivent pas un ordre strict.

donc aussi du vrai, mais on n'a pas de règle pour trier ce qui serait vrai et ce qui serait faux. Les axiomes, principes, hypothèses, etc… (i.e. ce dont part la déduction) sont *supposés vrais*. Si la déduction qui mène à telles conclusions est correcte, alors ces conclusions seront elles aussi *supposées vraies* (et non pas vraies). Il est méthodologiquement inadéquat de poser une hypothèse comme vraie, cela ne permet plus de comprendre les relations entre la théorie et l'expérience. Le vrai suppose une procédure d'expérimentation, et on ne peut jamais être certain, quel que soit le résultat de l'expérimentation, s'il porte uniquement sur ce qui est à vérifier. On ne peut isoler l'« objet » sur lequel porte l'expérience, c'est cela la fameuse thèse de Duhem-Quine, à laquelle il faudrait ajouter le nom de Poincaré. La cohérence de la théorie, ainsi que sa compatibilité avec d'autres théories est donc très importante dans l'évaluation d'une théorie. Par exemple, Maxwell a passé beaucoup de temps à chercher de façon pratique, avec des ressorts et des fils, s'il pouvait trouver un modèle mécanique de sa théorie électro-magnétique. S'il en trouvait un, il pouvait alors y en avoir une infinité d'autres (comme l'a montré Poincaré), et, du même coup, il montrait que sa théorie n'était pas contradictoire (exhiber un modèle est l'une des façons de montrer qu'une théorie n'est pas contradictoire).

Tout ce que nous explicitons ici a sa place dans la mesure où la démarche scientifique est considérée comme *hypothético-déductive*. Il faut savoir que ce n'est pas la seule procédure possible, la modélisation, la conception, la simulation informatique procèdent différemment (même s'il peut se trouver des hypothèses et des déductions !). Presque tous les textes les plus cités de l'épistémologie classique[11], ceux qui se consacrent à la description de la science (la lignée française Duhem, Poincaré, Meyerson, Bachelard,…, ou la lignée austro-américaine Carnap, Popper, Lakatos, Kuhn, Feyerabend, Holton, …) ont pour concept de référence la théorie, et donc cette démarche. Le terme d' « hypothético-déductif » a été inventé (selon Louis Couturat, qui avait lu à peu près tous les textes de l'époque) par un mathématicien italien, Mario Pieri, qui, à l'extrême fin du 19ème siècle

[11] L'épistémologie comporte une littérature extrêmement riche, il y a des textes de philosophes, de savants, de scientifiques (ce qui est une nuance différente), d'historiens, d'ingénieurs extrêmement nombreux et divers. En France, à cette dernière rentrée 2006-2007, est parue toute une série de livres sur l'épistémologie, sur l'eugénisme, sur l'histoire des protéines, sur les travaux mathématiques d'Emily Nœther, sur Gaston Bachelard, etc. etc. Mais cette tradition est souvent trop simplifiée, pour les besoins de la clarification, à quelques « lignées », alors que la bibliothèque est immense et très variée. Il y a la lignée française, Duhem, Poincaré, Couturat, Meyerson, Bachelard, pour ne citer que les plus connus. Il y a la lignée anglo-saxonne, souvent d'origine autrichienne, hongroise, allemande,…, Russell, Carnap, Neurath, Popper, Lakatos, Kuhn, Feyerabend, … Toutes leurs œuvres sont importantes. Mais il ne faut pas croire que l'histoire de ces filiations soit une description de la science. De nouveau, des thèses philosophiques s'affrontent, qui sont autre chose qu'une description. Il ne suffit pas de faire l'histoire du passage entre Popper, Kuhn, et Feyerabend pour répondre à la question : « qu'est-ce que la science ? ».

avait produit plusieurs mémoires sur la géométrie projective (qui est une géométrie non métrique), que Russell tenait en très haute estime[12].

QU'EST-CE QU'UNE LOI ? QUELLE EST SA FORME ?

Une loi est une corrélation entre un antécédent et un conséquent, qui a une forme logique définie. Si l'on combine deux propositions (l'antécédent et le conséquent) en fonction de deux valeurs {V,F} ou {1,0}, il y a 16 solutions possibles. La combinaison de deux propositions a quatre lignes, et le domaine de vérité est de deux valeurs, si bien que le nombre de combinaisons est de 2 (le nombre d'éléments dans le domaine de **V**) puissance 4 (le nombre de lignes résultant du produit cartésien des deux propositions)[13] : 2^4.

En voici le tableau, qui se lit en colonnes :

A	B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

La colonne 1 est la tautologie, la ligne 16 la contradiction.

La colonne 4 est « dégénérée », elle répète A, la ligne 6 est dégénérée, elle répète B.

La colonne 2 est le $\vee$: ou non-exclusif, disjonction (addition)

La colonne 8 est le $\wedge$: et, conjonction (multiplication)

La loi scientifique a la forme de la colonne 5, elle est le $\supset$: Si…, alors, c'est-à-dire la conditionnelle, appelée aussi implication (ce dernier terme pouvant être ambigu, il peut désigner aussi la relation de déduction).

Elle a la forme suivante : A : antécédent
B : conséquent

« $\supset$ » : opération conditionnelle (il y a d'autres signes, dont le fer à cheval ouvert à gauche)

[12] Je n'ai pas cité ici les travaux de Frege, qui portent sur des concepts plus « élémentaires » que celui de théorie : fonction, argument, variable, sens, dénotation.

[13] Tout cela est bien expliqué par exemple dans Denis Vernant, *Introduction à la logique standard*, Paris, Champs-Flammarion, 2001, p. 34-35.

A	⊃	B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0

En ligne :
A = {1100}
B = {1010}
A => B = {1011}

La conditionnelle est une opération (de même que la conjonction, la disjonction, etc.) au même titre qu'une opération arithmétique. Cette dernière est une application de **N** x **N** dans **N** (**N** qu'il faudrait écrire avec une double barre) (la combinaison de deux éléments de **N** donne un élément de **N**, par exemple 2+3=5). C'est la même chose pour la conditionnelle, elle est une application de **V**x**V** dans **V** (**V**, qu'il faudrait écrire avec double barre, étant ici tout le domaine {V,F} ou {1,0}). Mais dans les opérations logiques transcrites en langue naturelle, on n'entend pas le résultat, on dit simplement « si…, alors… ». En arithmétique, on dit les données et le résultat dans le langage « naturel ». Dans les opérations logiques, on ne dit que les données, ce qui trouble la compréhension.

Dans la compréhension de ce tableau, le sens commun, et souvent la vulgarisation ne considèrent que la première ligne. Par exemple A = on a une barre de métal, B = on chauffe la barre, résultat = on constate un allongement. Mieux : on dit qu'une telle démarche est scientifique parce qu'elle peut se répéter, ce qui ne fait que conforter la croyance que la démarche a été effectivement scientifique (alors que les grandes expériences scientifiques, celles du CERN (Centre Européen de Recherches Nucléaires, Genève et environs Français) par exemple , ne se font qu'une fois).

Le roman policier classique tient compte de la troisième ligne (ou du moins en est-ce une simplification amusante) : B = on a un cadavre, résultat = c'est bien un crime, A = ce n'est pas l'assassin que l'on croyait. Or dans la démarche scientifique, on tient compte de tous les cas.

Le scientifique se trouve devant un problème différent. Si une expérience réussit, il y a trois cas qui ne peuvent être distingués par l'expérience elle-même, le cas classique (1ère ligne, ce sont les choses que l'on connaît déjà), et le dernier cas, qui est le cas le plus intéressant pour le scientifique, car c'est grâce à lui que la nouveauté est possible. Mais il faut poser le problème tout autrement que dans l'exemple précédent. Il ne faut pas affirmer que la substance A est du métal (ou alors, par abrégé, comme un astronome peut dire que le soleil se lève !).

Voici, à peu près, la formulation pertinente :

A : nous avons un corps X qui a toutes les propriétés connues de l'eau sauf le point d'ébullition (plus généralement : sauf la propriété cherchée en B)

B : nous avons un corps X qui a un point d'ébullition proche de 100° C dans certaines conditions.

Si l'expérience ne marche pas (0), plusieurs cas se présentent, qui conduisent soit à revoir l'expérience (on n'a pas tenu compte des conditions, on n'a pas su tenir compte de la théorie de transition de phase en mécanique quantique), soit à penser que l'expérience n'était pas pertinente. Mais si l'expérience marche (1), il y a plusieurs cas possibles. Ou bien c'est le cas que nous connaissons bien (ligne 1), ou bien on a eu un X qui n'a pas tout à fait les propriétés connues, et le point d'ébullition n'est pas tout à fait 100°C, et alors on a jusqu'ici confondu sous le nom d'« eau » deux substances qui se distinguent principalement par leur point d'ébullition. Voilà comment en physique des particules on découvre de nouvelles particules (on observe quelque chose qui n'a pas tout à fait les propriétés de telle particule, et pas tout à fait sa masse, donc on admet une nouvelle particule que l'on confondait auparavant avec celle dont on a donné les propriétés en A).

Comment le scientifique peut-il dire s'il est sur un cas « classique » ou sur une « nouveauté » ? Par exemple le cas se pose actuellement au CERN dans une nouvelle expérience, où il s'agit de savoir s'il faut postuler un cinquième état de la matière (les quatre connus étant, en ordre décroissant d'importance : le plasma — que nous savons reconstituer dans les tokamak[14] (qui sont des machines à fabriquer le 4ème état de la matière, le plasma), l'état gazeux, l'état liquide et l'état solide. Il y a des phénomènes bizarres dont on ne sait s'il faut les rapporter au cas classique (quatre états), ou s'ils sont le signe d'un nouvel état. L'expérience est nécessaire, mais elle demande beaucoup d'à côtés, puisque l'expérience qui marche ne distingue pas elle-même trois cas. Au CERN, on regarde si le résultat est compatible avec les connaissances fondamentales, on compare le cahier de bord des physiciens, qui se relayent 24H sur 24, avec l'informatique *on line*, on fait des simulations avant l'expérience et pendant sa réalisation (les *runs*), on analyse toutes ces données informatiques, on réfléchit aux « bruits » que peut faire le détecteur (est-ce que ce que nous observons n'est pas un simple effet du détecteur ?), etc. etc. L'expérience, qui est unique, mais dure plusieurs années (plus longtemps qu'une thèse de doctorat…) est accompagnée d'une quantité de procédures qui permettent de « lire » et d'interpréter les résultats. De plus, les physiciens doivent se concerter pour décider s'ils ont bien vu ce qu'ils pensaient voir, ou ce que la théorie prédisait qu'ils devaient voir.

[14] Ce sont des machines extrêmement chères, en particulier parce qu'elles comportent un champ magnétique très puissant. Il y en a une à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, qui est financée par plusieurs pays.

Cette approche de la forme de la loi était bien connue. Il est possible de citer un texte de Poincaré :

« Quand je dis que le phosphore fond à 44°, je veux dire par là : tout corps qui jouit de telle ou telle propriété (à savoir toutes les propriétés du phosphore, sauf le point de fusion) fond à 44°. Entendue ainsi, ma proposition est bien une loi, et cette loi pourra m'être utile, car si je rencontre un corps jouissant de ces propriétés, je pourrai prédire qu'il fondra à 44°. Sans doute, on pourra découvrir que la loi est fausse[15]. On lira alors dans les traités de chimie : "Il existe deux corps que les chimistes ont longtemps confondus sous le nom de phosphore ; ces deux corps ne diffèrent que par leur point de fusion". Ce ne serait évidemment pas la première fois que les chimistes en arriveraient à séparer deux corps qu'ils n'auraient d'abord pas su distinguer ; tels par exemple le néodyme et le praséodyme, longtemps confondus sous le nom de didyme » (*La Valeur de la science* (1905), Garnier-Flammarion Poche, p. 164).

Qu'en conclure sur la question de la forme de la loi, ou, plus généralement, des corrélations, en sciences ? Qu'il n'est pas possible de séparer les termes A et B. C'est ce qui distingue la pratique scientifique de la vulgarisation, qui peuvent être très proches par ailleurs.

Bertrand Russell avait bien formulé cela :

« Nous devons maintenant essayer d'analyser ce qui est exprimé par les mots "A est toujours suivi de B". Ce qui est exprimé, ce ne peut être seulement que, lorsque j'ai l'expérience de A, j'attends B, car ceci est une autre loi générale, qui devrait être analysée d'une manière semblable et nous serions donc amenés à une régression sans fin. Ce qui est exprimé doit être une croyance qui englobe à la fois A et B et non un simple rapport causal entre une croyance n'englobant que A et une autre croyance n'enveloppant que B » (*Signification et Vérité* (1940), traduction de Philippe Devaux, Paris, Flammarion, 1969, p. 275).

[15] C'est ainsi que Poincaré interprète la ligne 4.

MISE EN RAPPORT DE LA DEDUCTION ET DE LA FORME D'UNE LOI (THEOREME DE LA DEDUCTION)

Ce qui est dit dans la suite est l'idée d'un mathématicien français (dans les années 30), Jacques Herbrand, qui avait beaucoup lu l'œuvre de David Hilbert. Il est mort à 23 ans dans un accident de montagne, si bien qu'il n'y a pas beaucoup d'autres résultats à son nom, mais nous verrons que celui-ci est fondamental pour comprendre ce qu'est une démonstration.

Supposons que nous ayons un ensemble d'hypothèses Γ et une hypothèse particulière A.

Si, de Γ, A on peut déduire B ce qui se note : $\Gamma, A \vdash B$, alors de Γ on peut déduire $A \supset B$.

N.B. : $\vdash$ = est déductible de

Donc si de $\Gamma, A \vdash B$, alors de $\Gamma \vdash A \supset B$

Théorème de la déduction[16]

Ce théorème met en relation ce que nous avons dit de la déduction (relations d'ordre partiel) et de la forme d'une loi. Si d'une hypothèse A, on peut déduire B, alors on peut affirmer que l'on a $A \supset B$. L'hypothèse A est transformée en antécédent de conditionnel.

Hypothèses Γ	supposées vraies
Hyp A	supposée vraie
Conclusion B	supposée vraie

Alors $\vdash$ (Hyp A $\supset$ Conclusion B), sous l'ensemble d'hypothèses Γ conditionnelle *supposée vraie*.

Cela n'est pas vrai seulement en physique, mais en mathématiques. Si vous avez démontré un théorème de géométrie plane euclidienne, vous avez démontré seulement qu'il est supposé vrai. Dans *La Théorie de la relativité restreinte et générale* (1916), trad. Maurice Solovine, 1976, ed. Agora, Press Pocket, Gautier-Villars, Einstein commence par rappeler cette connaissance élémentaire (mais difficile) de l'épistémologie. En effet, si on ne la comprend pas, il n'est pas possible de comprendre qu'en relativité générale, on fasse usage d'une géométrie non-euclidienne à 4 dimensions. Voici quelques lignes d'Einstein, au tout début de cet ouvrage :

« La géométrie part de certaines notions fondamentales telles que le point, la droite, le plan, auxquelles nous sommes capables d'associer

[16] Il s'agit en fait d'un « métathéorème ». J'ai écrit en toutes lettres « si …, alors … », parce que l'implication n'est pas au même niveau que le $\supset$ de « $A\supset B$ ».

des représentations plus ou moins claires, et de certaines propositions simples (axiomes), que nous sommes disposés à regarder, en vertu de ces représentations, comme “vraies“. Toutes les autres propositions sont ensuite ramenées, au moyen d'une méthode logique dont nous nous sentons forcés de reconnaître la légitimité, aux axiomes, c'est-à-dire démontrées. Une proposition est, par conséquent, exacte ou “vraie“, si elle est déduite des axiomes de la manière généralement admise. La question de savoir si une telle proposition géométrique est “vraie“ se ramène, par conséquent, à la question de savoir si les axiomes sont “vrais“. Mais on sait depuis longtemps que non seulement on ne peut répondre à cette question au moyen des méthodes de la géométrie, mais qu'elle n'a en elle-même aucun sens. On ne peut pas demander s'il est vrai que par deux points il ne passe qu'une seule droite. On peut seulement dire que la Géométrie euclidienne traite de figures qu'elle appelle “droites“ et auxquelles elle attribue la propriété d'être déterminées par deux de ses points. La notion de “vrai“ ne s'applique pas aux énoncés de la géométrie pure, car par le terme “vrai“ nous désignons, en dernier ressort, toujours la concordance avec un objet “réel“. Or, la Géométrie ne s'occupe pas du rapport entre ses actions et les objets de l'expérience, mais seulement du rapport logique de ces notions entre elles ».
Remarquez, dans ce texte, la définition de la démonstration, réduite ici à ce que nous appelons « déduction ».

QU'EST-CE QU'UNE DEMONSTRATION ?

On peut tirer plusieurs conclusions de cette corrélation entre la déduction et la conditionnelle.

1/ On comprend pourquoi une hypothèse est *supposée* vraie (et non pas simplement vraie), puisque dans la conditionnelle, si l'antécédent est faux, alors la conditionnelle est vraie. Donc l'hypothèse doit pouvoir donner lieu à un antécédent faux. On ne peut simplement la tenir pour « vraie », comme le fait remarquer Einstein. La poser fausse est absurde : on peut en tirer du vrai, mais aussi du faux, mais sans règle pour les départager.

2/ Il y a un lien entre déduction et démonstration : lorsque l'on a supprimé l'hypothèse A pour en faire l'antécédent de la conditionnelle, on a démontré $\vdash A \supset B$ sous l'ensemble d'hypothèse Γ.

Donc démontrer signifie supprimer les hypothèses.

3/ Montrer, dans une théorie, que $A \supset B$ est un théorème, c'est montrer que Γ est un ensemble vide : $\Gamma = \Phi$, c'est-à-dire qu'il n'y a plus d'hypothèse.

$\Gamma \vdash A \supset B$ est alors identique à $\vdash A \supset B$. On ạ écrit alors $\vdash A \supset B$, et $\vdash$signifie alors que l'expression qui suit est un théorème.

4/ Dans l'expression $\vdash A \supset B$, on ne considère que les trois cas vrais de la conditionnelle (c'est cela que veut dire « est un théorème »). Il y a des relations entre les opérations et les relations : une opération binaire (**N**x**N** dans **N** : 2+2=4) est une relation ternaire ({**N**,**N**,**N**} : {2,2,4}).

5/ Si démontrer consiste à supprimer des hypothèses, on peut construire des procédures automatiques pour démontrer des théorèmes. C'est pourquoi il y a tant de théorèmes démontrés par année, il faut plutôt sélectionner ceux qui ont de l'importance.

Pour parler de la démonstration, il faut donc mettre en place tout un ensemble de connaissances sur les théories et les systèmes hypothético-déductifs.

CHAPITRE 2

LES GRANDS DEBATS AUTOUR DE LA NOTION DE DEMONSTRATION

LA DEMONSTRATION PAR L'ABSURDE

Il arrive assez souvent en mathématique que l'on ne puisse démontrer directement un théorème $\vdash A \supset B$, ou, plus généralement, que sous un ensemble d'hypothèses théoriques, et une hypothèse A, on ne parvienne pas directement à monter que l'on puisse déduire B. On peut passer alors par une autre procédure.

On pose l'hypothèse A, et on pose aussi, par l'absurde, l'hypothèse non-B (on se donne le droit de faire des hypothèses, et par conséquent, justement celle-ci).

On cherche alors à montrer que de ces deux hypothèses A et non-B, on peut déduire une proposition quelconque P, mais aussi sa négation non-P.

On sait que d'une contradiction (comme également du faux, *Ex falso quodlibet sequitur* :

> $\vdash \neg P \supset (P \supset Q)$[17]), on peut déduire n'importe quoi.
> Ou que, de la contradiction ($\neg P$ et P), on peut introduire $\neg\neg P$ ou bien P.
> Donc on peut déduire en particulier B.

Donc on a $\vdash A \supset B$. CQFD

Exemple d'une démonstration par l'absurde : démontrons que l'on a
$\vdash \neg(P \vee Q) : \supset : \neg P \wedge \neg Q$

Pour cela, il faut montrer que l'on a $\neg P$ et $\neg Q$. Pour cela, on fait deux hypothèses par l'absurde :

1	$\neg(P \vee Q)$	Hyp (pour introduire $\supset$)
2	P	Hyp par l'absurde
3	$P \vee Q$	Par 2 et par la règle d'introduction du $\vee$
4	$\neg(P \vee Q)$	Par 1, réitératio n
5	$\neg P$	3, 4, introduction de $\neg$
6	Q	Hyp par l'absurde
7	$P \vee Q$	Par 5 et par la règle d'introduction du $\vee$
8	$\neg(P \vee Q)$	Par 1 et réitératio n
9	$\neg Q$	Par 7, 8, introduction de $\neg$
1 0	$\neg P \wedge \neg Q$	Par 5 et 9, règle d'introduction du $\wedge$
11	$\neg(P \vee Q) : \supset : \neg P \wedge \neg Q$	Par 1, 10, et la règle d'introduction de $\supset$

[17] Pour démontrer ce théorème, il faut admettre une règle d'élimination de la négation, qui n'est pas admise dans toutes les logiques.

Une telle démonstration suppose une définition de la négation :
Neg N = def $\neg$N
Neg $\neg$N= $\neg\neg$ N
Ce qui veut dire que N =def $\neg\neg$N
Ce dernier aspect de la définition ne va pas de soi.

Mettons-nous en effet dans un système où l’on cherche à dériver les deux principes qui fonderaient une telle définition :

Montrons que $\vdash P \supset \neg\neg P$

1	P	Hyp (pour introduire $\supset$)
2	$\neg P$	Hypothèse par l’absurde
3	P	1, réitération
4	$\neg P$	2, répétition
5	$\neg\neg P$	2, 3, 4 et introduction de la négation
6	$P \supset \neg\neg P$	1-5, introduction de $\supset$

C’est une partie du principe de la double négation, mais seulement une partie.

Voyons $\neg\neg P \supset P$

1	$\neg\neg P$	Hyp (pour introduire $\supset$)
2	$\neg P$	Hypothèse par l’absurde
3	$\neg\neg P$	1, réitération

4 Mais aucune règle ne nous permet ici d’interpréter $\neg\neg P$ si nous ne disposons pas de la validité du tiers exclu. Il y a là un « saut » que tous les logiciens et mathématiciens n’acceptent pas. Pour former une telle règle d’élimination de la double négation, il faut admettre le tiers exclu. C’est sur ce point que le débat se concentre.

Ce débat montre qu’il y a bien des façons d’interpréter la négation. Soit P vraie (car on doit admettre qu’il y a des P vraies). Que signifie $\neg$P ?

1. $\neg$P est la négation de P (logique classique, mais aussi logiques plurivalentes)
2. $\neg$P signifie que P est réfutable, c’est-à-dire que $\neg$P est un anti-théorème qu’il faut démontrer comme faux. Ce n’est pas nécessaire dans le calcul classique. La réfutation doit se faire en un nombre fini d’étapes.
   $\neg P = \text{def} \vdash (P = F)$
3. $\neg$P est absurde. De P on peut tirer n’importe quoi, voire simultanément le vrai et le faux, c’est-à-dire :

$\neg P = \text{df } (P \supset V. \wedge . P \supset F)$

4. $\neg P$ signifie que P est faux, et rejette la fausseté dans la métalangue

$\neg P = \text{Df } P \Rightarrow F$

Tout cela nous montre la difficulté de la compréhension de la négation. Il faudrait aussi mettre en jeu les lois de Morgan (qui sont des lois d'algèbre), etc… La détermination du sens de la négation est très délicate. C'est à travers elle que l'on peut développer, comme on dit aujourd'hui, des « logiques alternatives »[18].

Cette forme de démonstration par l'absurde est courante. On peut la résumer sous la forme suivante :

$\vdash (P \supset Q) \wedge (P \supset \neg Q) : \supset \neg P$

1	$P \supset Q$	Hyp
2	$(P \supset \neg Q)$	Hyp
3	P	Hyp par l'absurde
4	$P \supset Q$	1, réit
5	$P \supset \neg Q$	2, réit
6	Q	3 et 4, Modus Ponens (élimination de $\supset$)
7	$\neg Q$	3 et 5, élimination de $\supset$
8	$\neg P$	
9	$(P \supset Q) \wedge (P \supset \neg Q) : \supset \neg P$	Théorème

Mais avec cette démonstration, nous ne disposons toujours pas de règle d'élimination de la double négation. Il y faut le tiers exclu.

Or il y a des oppositions à ce type de démonstration, qui sont à la fois logiques et philosophiques.

1/ L'une d'elles, récurrente sous des formes plus ou moins rigides, affirme qu'il faut construire les êtres mathématiques. Il y avait déjà cette idée, mais pas sous ses formes extrêmes, chez Poincaré, et chez les mathématiciens français Emile Borel, René Baire et Henri Lebesgue[19]. Si on

[18] J. Van Benthem, G. Heinzmann and M. Rebuschi eds., *The Age of Alternative Logics: Assessing philosophy of logic and mathematics today*, 2004-2005: Kluwer.

[19] Voici ce que raconte Louis Couturat à Bertrand Russell dans une lettre datée du 18 décembre 1904 [Russell, 2001, p. 454] : « Qu'il soit utile de vulgariser la Logistique, ou même de la faire connaître, c'est ce dont j'ai chaque jour la preuve. J'ai fait la petite expérience que voici : mon ami M. Borel, mathématicien très distingué, m'ayant donné des ouvrages qu'il vient de publier pour en rendre compte dans la R.M.M. [*Revue de Métaphysique et de Morale*], j'ai rédigé quelques « remarques de logicien » que j'ai envoyées à lui, à M. Baire et à M Lebesgue (ses deux principaux collaborateurs) pour leur apprendre l'existence de la Logistique. Je vous envoie la copie de ces remarques, et de la lettre que j'ai répondue à M. Baire ; vous devinerez aisément les objections de celui-ci. Borel et M. Lebesgue m'ont fait des réponses analogues, c'est-à-dire tout à fait sceptiques,

peut tirer n'importe quoi de la contradiction entre P et non-P, ce ne sera pas un être mathématique construit, mais un « être » mathématique donné par l'effet d'une absurdité. On pourrait par là introduire des êtres qui ne sont pas prévus dans la théorie, voire même des contradictions. La démonstration par l'absurde a donc quelque chose d'arbitraire, ou tout au moins que l'on contrôle mal.

2/ L'autre, qui est en fait complémentaire, est que pour éviter ces absurdités, il faut rejeter la définition classique de la négation, qui permet le saut de ¬¬ N à N, et se passer du principe du tiers exclu, qui affirme que l'on a soit P comme théorème, soit non-P comme théorème, mais jamais les deux à la fois. C'est l'usage du tiers exclu qui permet des démonstrations qui posent un résultat non construit. C'est la position de l'école intuitionniste, inspirée des travaux du mathématicien et logicien hollandais Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966), puis de Arend Heyting (1898-1980), et de Hermann Weyl (1895-1955), au moins quelques temps pour ce dernier.

3/ Actuellement, il y a peu d'intuitionnistes et de constructivistes rigoureux dans leurs positions (car si l'on était rigoureux, il faudrait se passer de bien des théorèmes, et les mathématiques diminueraient comme peau de chagrin). Par contre, c'est une chose bien acceptée parmi les mathématiciens, quelle que soit leur obédience philosophique, qu'il vaut mieux disposer d'une démonstration directe. Si un théorème paraît vraiment important et que l'on ne dispose que d'une démonstration qui utilise, même localement, un raisonnement par l'absurde, on pourra considérer que c'est un véritable progrès mathématique que de trouver une démonstration qui s'en passe. En France, le mathématicien Roger Apéry (1916-1994), était un tenant de cette idée.

On voit par là que la question de la démonstration n'est pas un problème purement mathématique ou logique, mais que le point de vue philosophique du mathématicien joue un rôle dans sa façon d'appréhender le problème de la démonstration. L'opposition est parfois condensée sur l'élimination de la double négation, ou sur le tiers exclu, ou sur le problème

---

sous une forme plus ou moins aimable. Il est clair qu'ils dédaignent et ignorent les travaux de Peano et de son école, et les croient absolument inutiles et stériles. « Ils n'on pas besoin de cela pour raisonner juste, etc. ». Je crains bien que ce ne soit là l'attitude de tous les mathématiciens à l'égard de la Logistique ; ces gens qui vivent de symboles (au point de réduire toute leur science à un pur jeu de symboles) ont une aversion étrange et irréfléchie pour tout symbole qu'ils ne comprennent pas. Ils ne savent pourtant pas l'Algèbre de naissance ! ». Ces trois mathématiciens sont connus pour avoir publié « Cinq lettres sur la théorie des ensembles », in : *Bulletin de la Société Mathématique de France* 33(1905), pp. 261-273. Borel écrira plus tard dans la *Revue du mois* (qu(il a fondée avec sa femme) : « Je me suis toujours efforcé de séparer celles des parties de la théorie des ensembles qui ont effectivement contribué au progrès de la théorie des fonctions, des constructions logiques purement verbales dans lesquelles on jongle avec des symboles auxquels ne correspondent aucune intuition » [Russell, 2001, p. 457]. Voir tout le paragraphe sur « La démonstration : logique ou mathématique ».

de la construction des êtres mathématiques (voir la section du chapitre sur Poincaré). De toute façon, l'interprétation de la négation est déterminante. Selon le point d'opposition principal, on est classé plutôt comme intuitionniste ou plutôt comme constructiviste. Mais on peut traiter l'intuitionnisme comme une classe du constructivisme[20].

BADIOU ET LE RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE, UNE INDICATION

Une indication pour ceux qui s'intéressent à la philosophie contemporaine : Alain Badiou donne une grande importance au raisonnement par l'absurde dans sa philosophie. Dans *L'être et l'événement*, Paris, le Seuil, 1988, il y consacre une section de chapitre, pp. 275-279. Il voit dans ce mode de raisonnement une source de l'invention – sans doute lié au « saut » que nous avons souligné plus haut. Badiou lui donne une valeur comparable de ce point de vue à celle que Poincaré a accordé au raisonnement par induction complète, et la lie à la « vocation ontologique des mathématiques » (p. 278) :

« […] je considère, en accord avec l'historien des mathématiques Szabo, que l'usage du raisonnement apagogique[21] signe l'appartenance originaire de la fidélité déductive mathématique au souci ontologique. Szabo remarque que l'on trouve chez Parménide, à propos de l'être et du non-être, une forme typique du raisonnement par l'absurde, et il en tire argument pour disposer les mathématiques dans une filiation éléatique. Quoiqu'il en soit de la connexion historique, la connexion conceptuelle est convaincante » (p. 278).

Le raisonnement par l'absurde permet en effet de poser du multiple.
Il est donc également « aventureux », car son « but stratégique » n'est pas clairement fixé, comme dans le raisonnement hypothétique simple, donc constructif.

« Il y a indubitablement une différence importante entre le raisonnement constructif et le raisonnement non-constructif, ou apagogique. Le premier va d'énoncés déduits en énoncés déduits vers un énoncé qu'il s'est fixé pour but d'établir. Il teste ainsi des connexions fidèles sans se soustraire à la loi de la présentation. Le second installe d'emblée la fiction d'une situation qu'il suppose incohérente, jusqu'à que cette incohérence se

[20] Pour compléter ce chapitre, je signale les deux ouvrages suivants :
Jean-Louis Gardiès, *Le raisonnement par l'absurde*, Paris, P.U.F., 1991, et Jean Largeault, *Intuitionnisme et intuitionnistes*, Paris, Vrin, 2002.

[21] Le raisonnement apagogique est le raisonnement non-constructif (voir p. 279 dans la citation suivante).

manifeste, au hasard d'un énoncé qui contredit un résultat déjà établi. Cette différence s'attache moins à l'emploi de la double négation qu'à la qualité stratégique, faite d'assurance et de prudence interne à l'ordre d'un côté, d'aventureuse pérégrination dans le désordre de l'autre. Mesurons bien en effet le paradoxe qu'il y a à *déduire* avec rigueur, donc à utiliser les tactiques fidèles de connexion entre énoncés, au lieu même où vous supposez, par l'hypothèse $\neg A$, que règne l'incohérence, c'est-à-dire la vanité de ces tactiques. L'exercice tatillon d'une règle n'a pas d'autre usage ici que d'en établir, par la *rencontre* d'une contradiction singulière, la totale inanité. Cette combinaison du zèle de la fidélité et du hasard de la rencontre, de la précision de la règle et de la conscience de la nullité de son lieu d'exercice, est le trait le plus frappant de la procédure. Le raisonnement par l'absurde est ce qu'il y a de plus *militant* dans les stratégies conceptuelles de la science de l'être-en-tant-qu'être » (p. 279).

C'est évidemment une transposition *philosophique* que fait Alain Badiou, mais elle est très originale, et rejoint, au niveau de la philosophie des mathématiques, les préoccupations d'invention de Poincaré, bien que celui-ci ait été plutôt du côté des constructivistes, justement au nom de l'invention mathématique !

LA DEMONSTRATION : LOGIQUE OU MATHEMATIQUE ?

Sur la question de la démonstration, il y a eu un autre grand débat, depuis l'avènement d'une logique non plus aristotélicienne, mais mathématique. Bertrand Russell, avec Alfred North Whitehead, a écrit *Principia Mathematica* (1910-1913), qui est une réécriture, en langage logique, d'une grande partie du savoir mathématique de l'époque (mais le volume sur la géométrie n'est jamais paru). Russell espérait pouvoir écrire toutes les mathématiques en termes logiques, c'est ce qu'on appelle le « logicisme », d'un terme plus tardif. Mais il ne faut pas interpréter naïvement ce terme : Russell disait qu'il n'y avait pas de limite claire entre la logique et les mathématiques — si bien qu'il ne va pas de soi de fonder les unes sur l'autre. Russell dit aussi dans l'un des ses articles de la *Revue de Métaphysique et de Morale* que la logique est une science expérimentale, ce que je n'ai jamais vu qu'il dise des mathématiques. Cela signifie sans doute que la logique est une science (Gregory Landini, un interprète américain de Russell, 1998, a insisté sur ce point à juste titre, une science et non un langage), et que son objet est les mathématiques. C'est là une interprétation du logicisme.

Poincaré a très vite, comme il l'avait déjà fait en 1897-1898 à propos du livre de Russell, *Essai sur les fondements de la géométrie* (1897), initié une polémique dans le cadre de la *Revue de Métaphysique et de Morale*. Poincaré soutenait que les modes de démonstration relevant de la logique n'apportaient rien de nouveau, alors que le raisonnement par induction était proprement mathématique, et apportait du nouveau en mathématique. Il dit dans *Science et Méthode* (1908, p. 159-160) qu'il y a d'autres raisonnements mathématiques qui apportent du nouveau, mais il ne dit pas lesquels. Selon lui, le raisonnement par induction complète est le plus simple de tous.

LA SECONDE POLEMIQUE ENTRE HENRI POINCARE ET BERTRAND RUSSELL

Voici un certain nombre d'éléments pour interpréter cette controverse. Je donne ici une partie d'une conférence, prononcée le 7 avril 2004, au Séminaire de Michel Serfati, « Sur la controverse entre H. Poincaré et B. Russell ».

La seconde polémique, qui porte sur la logique, a à nouveau été provoquée par un article que Poincaré envoie à la *Revue de Métaphysique et de Morale*, dont Couturat fait part à Russell le 10 novembre 1905. Mais les circonstances sont bien différentes de la première fois dans la controverse sur les fondements de la géométrie. Russell a été amené, par Couturat et sans doute contre son gré, à un échange d'articles avec Pierre Boutroux, le neveu de Poincaré (Poincaré était le beau-frère du philosophe Emile Boutroux, ce qui n'a pas été sans effet sur la philosophie de Poincaré). Par ailleurs, Russell fait savoir le 21 novembre 1905 à Couturat que Poincaré a été froissé par un compte-rendu qu'il a fait de la traduction de *La Science et l'Hypothèse* dans le *Mind*. Il ne s'agit plus de la réaction à un livre, mais d'un contexte beaucoup plus compliqué. Couturat y a une large part par ses propres articles parus dans la *Revue de Métaphysique et de Morale* inspirés de *The Principles of Mathematics* qu'il rassemble en volume sous le titre *Les Principes des mathématiques*. Pierre Boutroux, dans une lettre adressée à Russell, explique la conjoncture de ces débats comme liés partiellement à la rédaction du *Vocabulaire critique de la philosophie* d'André Lalande, auquel participe Couturat (7 novembre 1905, [Russell, 2001, 548]) :

« Je reconnais, en vous lisant, que j'ai sans doute dénaturé votre pensée sur quelques points. Mais j'ai en même temps l'impression que M. Couturat n'a pas dû non plus la rendre très exactement dans ses articles de la *Revue de Métaphysique*. Car il me semble qu'il soutient assez énergiquement la doctrine du définitif et qu'il ne laisse aucune porte ouverte pour la variation possible des concepts logiques. Cette idée, que nous connaissons le définitif, me paraît être également celle qui préside à la fabrication du Dictionnaire philosophique de M. Lalande. On croit qu'on peut faire une énumération complète et définitive des notions, et qu'en les rangeant dans un dictionnaire, on fixera à tout jamais le sens du langage philosophique » (lettre conservée aux Russell Archives, sous le n° 710.047457).

La part de vérité de cette lettre est que Russell ne voit plus la logique comme un fondement pour les mathématiques, mais comme une science :

« La méthode de la Logistique est essentiellement la même que dans tout autre science. Elle comporte la même faillibilité, la même incertitude, le même mélange d'induction et de déduction, et la même nécessité de faire appel, pour confirmer les principes, à l'accord des résultats calculés avec l'observation. Son objet n'est pas de bannir l'« intuition », mais de contrôler et de systématiser son emploi, d'éliminer les erreurs auquel son emploi non contrôlé donne lieu, et de découvrir les lois générales d'où l'on peut, par déduction, obtenir des résultats jamais contredits par l'intuition, et, dans les cas cruciaux, confirmés par elle. En tout cela, la Logistique est exactement sur le même pied que l'astronomie par exemple, excepté que, en astronomie, la vérification s'effectue non par l'intuition mais par les sens. » [Russell, 1906, 630][22].

Sur cette question, Couturat et Russell divergent d'une façon qui aura des conséquences sur leur amitié.

D'autre part, la logique n'a pas de place dans la géographie des sciences de Poincaré. La logique fait partie des facultés de l'esprit, et Poincaré ne peut réagir que de façon polémique au projet de faire de la logique une science.

LA THESE DU « LOGICISME »

Toutes les positions russelliennes sur les termes et les relations se retrouvent dans la discussion entre Poincaré et Russell sur la logique (Russell accepte le principe des relations externes selon lequel les faits sont indépendants de l'expérience. On ne peut, en analysant un terme, retrouver ses relations, comme chez Leibniz et Hegel – il y a des termes et il y a des relations). Mais elle se double d'une thèse de la part de Russell que Poincaré ne pourra accepter, connue sous le nom de « logicisme »[23], terme beaucoup plus tardif. Cette thèse, dès 1901, affirme que toutes les mathématiques *pures* — non pas les mathématiques *appliquées* — peuvent être exprimées

[22] Russell, Bertrand, 1906 Les Paradoxes de la logique, *Revue de Métaphysique et de Morale* 14, 627-650.

[23] Voir [Grattan-Guinness, 2000, 500-501]. Il semble que le mot "logicisme" ait été fabriqué en 1929 par Carnap à partir de "logistique", mot qu'il trouvait "bâtard". Mais du coup la signification en a été changée : "logistique" désignait sous la plume de Couturat une discipline, et, sous celle de Carnap, "logicisme" les thèses soutenues dans *Principia Mathematica*.

au moyen de constantes logiques et de variables[24]. Cette thèse a souvent été transformée en doctrine par les lecteurs de Russell, comme si la logique pouvait être un fondement épistémologique pour les mathématiques. Russell dit avoir cru une telle chose quelque temps, dans les phrases qui précèdent la dernière citation. À quoi donc servait cette thèse selon Russell ? À se donner le moyen de montrer la non-réduction des mathématiques à des objets trop partiels : les mathématiques ne se réduisent pas à l'étude du nombre et de la grandeur (c'était déjà une idée de Leibniz), l'arithmétique ne se réduit pas à l'étude des nombres finis, ni la géométrie à l'Euclidienne seule, ni la logique à la syllogistique. L'une des mésinterprétations remarquables de cette thèse suppose que la logique serait une syntaxe pour les mathématiques, ce qui est évidemment un anachronisme. Il faut prendre tout à fait au sérieux l'idée que la logique est une science à part entière, comme l'a montré Landini[25]. Il n'existe pas de critère disant où commencent les mathématiques et où finit la logique, cette dernière est plutôt le résultat d'une analyse des mathématiques[26].

Il est maintenant possible d'interpréter les discussions entre Poincaré et Russell sur l'induction complète, sur l'idée de nombre, sur l'axiome de choix de Zermelo, sur la notion d'existence, sur les définitions, sur les postulats. Leurs désaccords reposent tous sur des problèmes de méthode et sur l'admission ou non des ensembles et des nombres infinis. Il est possible que la discussion de Poincaré avec Russell ait contribué indirectement à son abandon progressif du platonisme, c'est du moins une hypothèse plausible. Russell pense que les connaissances a priori ne disent rien sur le monde. Il faut les articuler à des données connues directement (*accointance*). Les termes qui ne sont pas empiriques sont d'abord pour lui quelque chose comme une idée platonicienne, distincte de toute autre comme le goût de l'ananas est distinct de n'importe quel autre, puis deviendront, dans les mêmes années que la seconde polémique, une fiction logique. Poincaré et Russell ont eu finalement des positions plus proches que ce que Couturat pouvait accepter.

Russell reprend Couturat sur un autre point encore, trouvant que ce dernier ne l'a pas compris :

« Il n'est pas juste d'appeler φx une *proposition variable* ; *p* est une proposition variable, par opposition à « Socrate est mortel », qui est une

[24] La première formulation de cette thèse se trouve dans « Recent Work on the Principles of Mathematics », *in* : *International Monthly* 4 (july 1901) 83-101. Il faut rester prudent dans l'interprétation de cette thèse. [Sainsbury, 1979, 272 sqq.] indique certaines des nuances importantes. Voir aussi [Heinzmann, 1994, 37].

[25] Landini, Gregory, 1998 *Russell's Hidden Substitutional Theory*, New York, Oxford : Oxford University Press, 1998.

[26] Russell, Bertrand, 1919 *Introduction to Mathematical Philosophy*, Londres : G. Allen and Unwin. Traduction française par G. Moreau, Paris : Payot, 1961, par exmple p. 231.

P. constante. *φx* est une valeur variable d'une fonction variable. » (R 05.07.04) [Russell, 2001, 428].

De même *R* est une relation variable, et non pas telle ou telle relation, il le rappelle dans sa « logique des relations avec des applications à la théorie des séries » (*Revue de Métaphysique et de Morale* 7(1902) :

« … on ne doit pas considérer telle ou telle relation particulière, à l'exception de celles qui sont fondamentales pour la logique (comme ε et ⊃)[27], mais bien les relations d'une certaine classe — par exemple, les relations transitives et asymétriques, et les relations univoques et réciproques » [Russell, 1993, 613].

Les fonctions mathématiques ordinaires sont la plupart du temps des fonctions de fonction. Cette position marque l'empirisme de Russell. Dans toute discipline, on peut faire la distinction entre ce qui est donné, et qui pourra remplacer l'argument de la fonction, et ce qui est « fiction logique ». Par contre, il sera toujours important de faire une distinction entre les disciplines pures, introduites par des définitions, et les disciplines appliquées, introduites par des axiomes. Toutes ces considérations sont nécessaires pour comprendre l'enjeu de la polémique de Poincaré et Russell sur le principe d'induction complète.

LE « CONSTRUCTIVISME » DE POINCARE ET LA DOUBLE VARIABILITE DE RUSSELL

L'antiplatonisme[28] de Poincaré veut que la suite des nombres naturels soit donnée par la possibilité de répéter une opération une fois qu'elle est reconnue possible. Pour Poincaré, le principe d'induction est un des raisonnement proprement mathématiques (et non logiques). Il considère que le principe d'induction, qui n'est applicable que pour les objets définis par induction, permet de passer du particulier au général, et même du fini à

[27] ε est le signe d'appartenance, inventé par le mathématicien italien Giuseppe Peano (auteur d'un fameux *Formulaire mathématique* — ainsi que de la construction de la ligne qui remplit toute une aire, première idée des dimensions fractales), qui indique qu'un élément appartient à un ensemble et ⊃ est le signe d'inclusion (qui a des caractéristiques formelles semblables à celles de la conditionnelle qui explique le choix de la ressemblance de signe), qui indique qu'en ensemble est inclus dans un autre ensemble. L'inclusion est transitive alors que l'appartenance ne l'est presque jamais. Si l'on suppose que je suis un élément de cette chambre, que la chambre est inclue dans la maison, que la maison est inclue dans l'ensemble que forme le jardin, je ne puis en conclure que je suis au jardin (c'était un exemple donné par le logicien Jean-Blaise Grize dans ses cours). Russell pensait à juste titre que Peano était le premier à avoir pu traiter le mot « le » (*The*) si important en mathématiques.

[28] C'est le terme de Gerhard Heinzmann dans [Heinzmann, 1994].

l'infini. Russell voit une infinité de suites là où Poincaré voit celle des nombres naturels comme donnée, et surtout, il ne peut identifier le nombre à ce que l'on atteint par une numération. Le nombre est une classe de classes équivalentes. il est la propriété d'une classe, et non pas d'un objet. Le nombre 1 sera la classe des termes identiques à *x*, le nombre 2, par exemple, sera la classe dont les seuls membres sont *x* et *y*. Le principe d'induction est la définition des nombres finis et permet d'en donner une définition nominale [Russell, 2001, 575] et [Russell, 2001, 575].

Le principe d'induction est doublement général, il est à la fois une affirmation sur tous les nombres entiers finis, qui peuvent être atteints par la répétition de « +1 » à partir de zéro, mais aussi sur toutes les propriétés qui, si elles appartiennent à 0, appartiennent au suivant de *n* si elles appartiennent à *n*.

« Encore une fois, M. Poincaré se trompe en voyant dans le principe d'induction mathématique un moyen de passer du particulier au général : il est simplement un moyen de passer d'une proposition générale à une autre. Nos prémisses sont, premièrement, qu'une certaine propriété appartient à zéro ; cela, nous pouvons l'admettre, est particulier ; deuxièmement, que *tout* nombre fini *n* est tel que, si *n* a ladite propriété, alors *n+1* la possède aussi : ceci est général. La conclusion est que tout nombre fini a ladite propriété. Mais cette conclusion est exactement du même degré de généralité que notre seconde prémisse. L'illusion de passer du particulier au général ne provient que de la négligence de notre seconde prémisse »[29] [Russell, 1905b, 225].

De plus, le principe d'induction limite les nombres finis. Il est l'équivalent de l'idée de clause finale :

« Ce principe limite les nombres naturels en même temps qu'il montre que leur suite est sans fin : tous apparaissent dans cette suite, dont n'importe quel point peut être atteint par étapes successives en partant de zéro. Maintenant cette limitation qui est réellement utilisée lorsque l'on conduit une preuve par induction mathématique, n'est pas une intuition synthétique à priori, ou une propriété de l'esprit, ou encore une condensation d'un nombre infini de syllogismes ; elle est tout simplement la *définition* du nombre *fini*. Un nombre fini est celui sur lequel s'applique l'induction mathématique ; un nombre infini est celui sur lequel elle ne s'applique pas » [Russell, 1905b, 224-225].

---

[29] Russell, Bertrand, 1905b, Science and Hypothesis, *Mind* 14, 412-418. Traduction française par Elisabeth Stœsser, *in* [Schmid, Anne-Françoise 2001, *Henri Poincaré, les sciences et la philosophie*, Paris : L'Harmattan] 222-232, p. 225.

L'interprétation de Poincaré est que cette limitation est l'effet d'une intuition synthétique[30]. Le passage de la définition au raisonnement par induction suppose une synthèse que l'itération « +1 » ne suffit pas à expliquer. À chaque pas du raisonnement, il est possible de vérifier le résultat de l'opération, et cette vérification est analytique. Mais le passage à $N+1$ suppose une synthèse qui fonctionne comme la limitation de Russell.

Une telle interprétation ne convient pas à Russell. De toutes façons, la plupart des propositions de la logique sont synthétiques, il n'est donc pas nécessaire de réserver cette synthèse au principe d'induction. Sur ce point Couturat a passablement changé les termes du débat, parce qu'il conservait la distinction entre analytique et synthétique, que Russell critique dès son livre sur Leibniz[31]. Russell n'a pas de position dogmatique sur la différence entre analytique et synthétique, qui n'a de sens possible qu'en philosophie, pas plus que sur l'intuition. La logique guide l'intuition, celle-ci n'est d'ailleurs pas locale, attachée à tel ou tel principe, mais tient à l'ensemble.

De plus, Russell trouve que la conception de la répétition selon Poincaré est trop simple. Cette question est reprise plusieurs fois dans la correspondance avec Louis Couturat. Voici ce que Russell en dit à propos de Hilbert, le 9 février 1905 :

« Autre chose : son idée de *combinaison* est d'une complication dont il n'a aucun soupçon. Il se permet la répétition d'un même objet 1 ; donc, il faut que ce ne soit pas une classe dont il s'occupe, mais une corrélation, une relation 1 => *Nc* entre 1 et les objets d'une classe donnée, ou plutôt d'une série donnée. Puisqu'il se permet tout nombre fini de répétitions, il faut que cette série soit infinie. Si vous essayez d'analyser et de préciser la notion de *répétition*, vous verrez que ces conséquences sont nécessaires » [Russell, 2001, 475],

Russell l'explique également en d'autres termes dans le même article du *Mind*[32]. Cela est tout à fait cohérent avec sa thèse des relations externes : ce n'est pas une répétition simple qui explique l'induction, mais une espèce de relation entre la classe des classes ne contenant qu'un élément avec les classes de couples, puis les classes de triplets, etc…, cela en partant de zéro [Russell, 2001, 364].

Il n'est pas possible de donner tous les détails de cette différence entre Poincaré et Russell. Mais l'idée que la démonstration par induction doive être purement mathématique ou non détermine une série de différences

[30] C'est l'idée de Gerhard Heinzmann dans [Heinzmann,1994, 52], qui donne une interprétation pragmatiste à cette synthèse. Il suggère à ce propos des liens possibles entre Wittgenstein et Poincaré (p. 43).

[31] Russell, Bertrand, 1900, *A critical Exposition of the Philosophy of Leibniz,* Cambridge, Cambridge University Press. Traduction française par J. et R. Ray : *La Philosophie de Leibniz. Exposé critique*, Paris, Félix Alcan, 1908.

[32] Russell, Bertrand, 1905b, Science and Hypothesis, *Mind* 14, 412-418. Traduction française par Elisabeth Stœsser, *in* [Schmid, Anne-Françoise 2001, *Henri Poincaré, les sciences et la philosophie*, Paris : L'Harmattan] 222-232, p. 224.

philosophiques, ce n'est pas une position que l'on puisse résumer simplement.

Le constructiviste a tendance à penser que les démonstrations sont de l'ordre des mathématiques, et non de la logique. Dans des débats presque récents autour de Jean Dieudonné – membre de Nicolas Bourbaki et qui n'aimait pas la logique -, ou autour de Roger Apéry (mathématicien constructiviste), tous ces débats ont été relancés.

Même après les développements, même récents de la logique mathématique, les débats philosophiques sur la démonstration et la déduction peuvent toujours avoir lieu, mais en tenant compte néanmoins de ce que l'on sait maintenant sur leur relation.

PETITS ELEMENTS DE BIBLIOGRAPHIE, EN SUS DES NOTES EN BAS DE PAGES

Pour le préambule, les références sont données dans le texte.
On peut trouver de la bibliographie et des notes sur les questions traitées au chapitre 1 dans les deux ouvrages suivants

Anne-Françoise Schmid
L'Âge de l'épistémologie. Science, ingénierie, éthique, Paris, Kimé, 1998.
Que peut la philosophie des sciences ?, Paris, Pétra, 2001.

Pour la bibliographie qui accompagne le bout de conférence à l'Institut Poincaré, voici les références :

Brenner, Anastasios
2003 *Les Origines françaises de la philosophie des sciences*, Paris : Presses Universitaires de France

Clémentz, François et Schmid, Anne-Françoise eds
1990, *Bertrand Russell, de la logique à la politique*, n°spécial de *Hermès* 7(1990).

Dummett, Michael
1994 *Origins of Analytical Philosophy*, Cambridge, Mass. : Harvard University Press. Il existe une traduction française datée de 1991 à partir de la version allemande.

Dumoncel, Jean-Claude
2002 *La Tradition de la* Mathesis Universalis, *Platon*, *Leibniz*, *Russell*, Paris : Cahiers de l'Unebévue, 2002.

Grattan-Guinness, Ivor
2000 *The Search for Mathematical Roots 1870-1940. Logic, Set Theories and the Foundations of Mathematics from Cantor through Russell to Gödel*, Princeton, Oxford : Princeton University Press, 2000.

Griffin, Nicholas
1991 *Russell's Idealist Apprenticeship*, Oxford : Clarendon.

Heinzmann, Gerhard
1994 On the Controversy between Poincaré and Russell about the Status of Complete Induction, *Epistemologia* 17, 35-52.

1996, *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano. Textes de la discussion (1906-1912) sur les fondements des mathématiques, des antinomies à la prédicativité*, Paris : Albert Blanchard.

Hylton, Peter
1990 *Russell, Idealism and the Emergence of analytic Philosophy*, Oxford : Clarendon.

Landini, Gregory
1998 *Russell's Hidden Substitutional Theory*, New York, Oxford : Oxford University Press, 1998.

Nye, Mary Jo
1979 The Boutroux Circle and Poincaré's Conventionalism, *Journal of the History of Ideas*, 40, 107-120.

Poincaré, Henri
1902 *La Science et l'Hypothèse*, Paris : Flammarion, 1902.

Russell, Bertrand

1897 *An Essay on the Foundations of Geometry*, Cambridge, Cambridge University Press. Traduction française par Albert Cadenat : *Essai sur les fondements de la géométrie*, Paris : Gauthier-Villars, 1901.

1900 *A critical Exposition of the Philosophy of Leibniz*, Cambridge, Cambridge University Press. Traduction française par J. et R. Ray : *La Philosophie de Leibniz. Exposé critique*, Paris, Félix Alcan, 1908.

1903 *The Principles of Mathematics*, Cambridge : Cambridge University Press, 1903.

1905a Science and Hypothesis, *The Westminster Gazette*, 3 juin 1905. Traduction française par Elisabeth Stœsser, *in* [Schmid, Anne-Françoise 2001, *Henri Poincaré, les sciences et la philosophie*, Paris : L'Harmattan] 217-222.

1905b Science and Hypothesis, *Mind* 14, 412-418. Traduction française par Elisabeth Stœsser, *in* [Schmid, Anne-Françoise 2001, *Henri Poincaré, les sciences et la philosophie*, Paris : L'Harmattan] 222-232.

1906 Les Paradoxes de la logique, *Revue de Métaphysique et de Morale* 14, 627-650.

1912 *The Problems of Philosophy*, Oxford : Oxford University Press, 1912. Traduction française par S. M. Guillemin, *Problèmes de philosophie*, Paris : Payot, 1968.

1914 *Our Knowledge of the external World*, Londres : G. Allen and Unwin. Traduction française par Philippe Devaux, *La Méthode scientifique en philosophie. Notre connaissance du monde extérieur*, Paris : Payot, 1971.

1919 *Introduction to Mathematical Philosophy*, Londres : G. Allen and Unwin. Traduction française par G. Moreau, Paris : Payot, 1961.

1940 *An Inquiry into Meaning and Truth*, New York : Norton, 1940. Traduction française par Philippe Devaux, *Signification et Vérité*, Paris : Flammarion, 1959.

1959 *My philosophical Development*, traduction française de Georges Auclair, 1961, *Histoire de mes idées philosophiques*, Paris : Gallimard.

1989 *Écrits de logique philosophique*, textes traduits de l'anglais par Jean-Michel Roy, Paris : Presses Universitaires de France, 1989.

1993 *Toward the "Principles of Mathematics" 1900-1902*, edited by Gregory H. Moore [*The Collected Papers of Bertrand Russell*, volume 3], London, New York : Routledge, 1993.

1994 *Foundations of Logic 1903-1905*, edited by Alasdair Urquhart with the assistance of Albert C. Lewis [*The Collected Papers of Bertrand Russell*, volume 4], London, New York : Routledge, 1994.

2001 *Correspondance sur la philosophie, la logique et la politique avec Louis Couturat (1897-1913)*, édition et commentaire par Anne-Françoise Schmid, Paris : Kimé, 2 volumes, 2001.

Russell, Bertrand et Whitehead, Alfred North
1910-1913 *Principia Mathematica*, Cambridge : Cambridge University Press.

Russell, Bertrand et Whitehead, Alfred North
1962 *Principia Mathematica* to *56, Cambridge : Cambridge University Press.

Sainsbury, R. M.
1979, *Russell*, London, Boston, Henley : Routledge and Kegan Paul, 1979.

Schmid, Anne-Françoise
2001a *Henri Poincaré, les sciences et la philosophie*, Paris : L'Harmattan.
2001b *Que peut la philosophie des sciences ?* Paris : Pétra.

Vernant, Denis
1993 *La Philosophie mathématique de Bertrand Russell*, Paris : Vrin.
2003, *Bertrand Russell*, Paris : Flammarion.

Menu de navigation
en mode plein écran dans Adobe Reader

Déplacez la palette du sommaire ci-dessous en la saisissant par la barre du haut et redimensionnez-là à l'aide du coin en bas à droite.

Cette palette vous permet de vous reporter aux têtes de chapitres.
Ne la fermez pas !

Le présent menu se trouve en dernière page

Comment lire ce document ?	utilisez les raccourcis clavier
Avancer d'une page : (sauf depuis cette page)	`clic` ou ↵ `(entrée)`
Reculer d'une page :	`ctrl + clic` ou ⬆ + ↵ `(maj + entrée)`
Sortir et quitter : (en haut à gauche du clavier)	`esc (escape)`

✔ La main ou le pointeur doivent se trouver **dans l'espace de la page** *- et non dans le sommaire -* pour que ces raccourcis fonctionnent.

Vous pouvez également utiliser le petit navigateur en bas à droite du clavier :

↑
← →
↓

Cliquez sur les liens ci-dessous pour :	ou utilisez les raccourcis clavier :
Imprimer des pages	`ctrl + p`
Reprendre la lecture à la page que vous venez de quitter	

) Commencer la lecture …

Le mode plein écran est un affichage de lecture.
Pour effectuer des recherches dans ce document, utiliser le zoom ou prendre des notes de marge, il est conseillé de passer en affichage standard : appuyez sur la touche `esc` de votre clavier.
Ce menu s'adresse aux personnes non familières de la lecture écran. Les initiés de la navigation clavier pourront se servir de tous les raccourcis habituels.