Logique et épistémologie

Méthodes de démonstration en arithmétique

Robert Vidal

Philopsis: Revue numérique
https://philopsis.fr

Les articles publiés sur Philopsis sont protégés par le droit d'auteur. Toute reproduction intégrale ou partielle doit faire l'objet d'une demande d'autorisation auprès des éditeurs et des auteurs. Vous pouvez citer librement cet article en en mentionnant l'auteur et la provenance.

Ceci est un extrait, retrouvez le document complet sur philopsis.fr

En la genèse d'une science, il n'est pas de commencement absolu. Comme le dit si bien, en parlant de l'astronomie, Pierre Duhem,

> « Si haut que l'on remonte la lignée des pensées qui ont préparé, suggéré, annoncé cette doctrine (une doctrine scientifique), on parvient toujours à des opinions qui, à leur tour, ont été préparées, suggérées et annoncées ; et si l'on cesse de suivre cet enchaînement d'idées qui ont procédé les unes des autres, ce n'est pas qu'on ait mis la main sur le maillon initial, mais c'est que la chaîne s'enfonce et disparaît dans les profondeurs d'un insondable passé »[1].

Résolument, c'est vers Euclide que notre premier élan nous pousserait à faire commencer cette étude des méthodes de démonstrations utilisées en arithmétique. C'est en effet le premier mathématicien dont les écrits sur cette science, les *Livres arithmétiques* des *Eléments*, nous soient parvenus entiers et authentiques. Il est à noter que ces *Livres arithmétiques* font partie d'une somme essentiellement consacrée à la géométrie. La géométrie opère sur les grandeurs (lignes, surfaces, volumes) et procède par construction (à la règle et au compas) alors que l'arithmétique s'intéresse aux propriétés singulières des nombres. Quelques remarques s'imposent à la lecture des *Eléments* :

1 Duhem Pierre, *Le système du monde-Histoire des doctrines cosmologiques de Platon à Copernic* (10 vol.), Paris, Hermann, 1960, tome 1, p.5.

- Euclide reprend dans les *Livres arithmétiques* des propriétés démontrées pour les grandeurs au Livre V. Ceci est révélateur de la différence radicale qui existe pour lui entre la quantité continue (qui est traitée géométriquement) et les quantités discrètes (traitées arithmétiquement).

- Le corpus euclidien fait appel à l'abstraction et à la problématisation. Au lieu d'utiliser les nombres dans des calculs, aussi sophistiqués soient-ils, comme cela semble être le cas chez les Babyloniens ou les Egyptiens, ils sont étudiés ici pour eux-mêmes. On cherche à identifier leurs propriétés et celles des opérations que l'on effectue sur eux.

- Le livre IX laisse apparaître un fragment, consacré au pair et à l'impair, avec des preuves moins élaborées.

- Les nombres sont représentés par des segments, même si cette représentation n'intervient pratiquement pas dans le raisonnement et la démonstration de la propriété considérée.

Nous constatons donc le caractère particulier de ce traité d'Euclide qui peut ne donner qu'un point de vue de la mathématique de l'époque et voyons donc ce qu'il y aurait d'arbitraire dans le choix des *Eléments* comme point de départ de notre étude. Il nous apparaît alors intéressant de chercher parmi les pratiques antérieures à Euclide pour mieux comprendre le caractère de ce traité.

- Utilisait-on des preuves, et si oui de quels types ? Les démonstrations présentées dans le corpus sur le pair et l'impair du Livre IX sont en effet d'un niveau de rigueur logique nettement inférieur à celui du reste des *Livres arithmétiques.*

- Il peut également se faire que d'autres conceptions mathématiques sur les nombres aient été laissées de côté par Euclide, soit parce qu'elles ne rentraient pas dans son propos, soit parce qu'il n'a pas su les traiter avec rigueur. Il y aurait donc intérêt à chercher parmi ces traces de mathématiques antérieures à Euclide dans l'espoir de mettre à jour des notions ou des ébauches de notions absentes dans les *Eléments.*

Dans quelle direction, dans quels documents allons-nous chercher ces fragments de mathématique ?

Il ne nous reste pas de traité arithmétique chez les anciens Grecs, juste une « conception du monde », basée sur le « nombre » et rapportée principalement par Aristote dans la *Métaphysique* comme relevant des Pythagoriciens. Ce que la tradition nous rapporte c'est une conception générale de l'Etre, fondée sur la *correspondance naturelle du nombre et de la grandeur* : les nombres sont considérés comme des configurations ou structures de points géométriques et la grandeur est par nature nombrée, structurée par les nombres. Les nombres sont en quelque sorte en bijection avec les choses. Les mouvements des planètes pouvaient par exemple être exprimés par des quotients de

Robert Vidal © philopsis – Tous droits réservés

nombres, les harmonies musicales dépendaient également de rapports de nombres. Où trouver donc des sources assez dignes de fois sur l'arithmétique qui a pu être à la base de ces théories philosophiques ?

Si l'on consulte un des ouvrages les plus reconnus sur les mathématiques grecques, celui de Sir Thomas L. Heath[2], nous trouvons un chapitre intitulé « Pythagorean arithmetic ». Il ressort de la lecture de ce chapitre que les sources les plus systématiquement utilisées par Heath sont des ouvrages écrits aux Ier, IIème et IVème siècles de notre ère. Ce sont :

*L'*Introduction arithmétique* de Nicomaque de Gérase

*L'*Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon* de Théon de Smyrne.

*Le commentaire de Jamblique sur le livre de Nicomaque.(*On Nichomacus's Introductio arithmetica.*)

Ces ouvrages sont censés rendre compte de l'arithmétique pythagoricienne. Toutefois il est important de noter qu'ils sont, dans le temps, fort éloignés de l'époque de Pythagore et de ses premiers disciples. Si l'on compare le plus proche de Pythagore, celui de Nicomaque, au traité d'Euclide, on constate d'emblée des différences évidentes :

- Le traité de Nicomaque par exemple ne comporte pas de démonstrations, mais donne des exemples numériques. Est-ce lié au fait qu'il s'adresse à un public de non-mathématiciens, comme celui de Théon de Smyrne, ou est-ce parce qu'il se veut proche d'une tradition pythagoricienne ancienne ?

- Il traite également, contrairement aux *Livres arithmétiques* d'Euclide, d'un mode de représentation des entiers qui utilise l'espace. Les nombres sont représentés par des groupes de points, des constellations géométriques régulières, nombres triangulaires, nombres carrés, etc…

Est-ce ici aussi un artifice pédagogique tardif ou la trace authentique d'une arithmétique pythagoricienne ? Dans l'excellent ouvrage qu'il a consacré à ces mathématiques, Maurice Caveing[3] prouve, en s'appuyant entre autres sur des textes d'Aristote, que ces preuves existaient déjà bien avant Euclide.

Une autre voie qui s'offre à nous est celle qui consiste à chercher dans ce que Platon appelle la « logistique ».

L'analyse des procédés de calcul peut également nous renseigner sur d'éventuels transferts de compétences en provenance de pays tels que Babylone ou l'Egypte. Il nous semble donc souhaitable

2 Heath Thomas L.A., *History of greek mathematics*, New York, Dover Publications, Volume I, *From Thales to Euclid*.

3 Caveing Maurice, *La figure et le nombre. Recherches sur les premières mathématiques des Grecs*, Presses universitaires de Septentrion, 1997.

Robert Vidal © philopsis – Tous droits réservés

de rechercher dans les textes grecs, y compris dans le traité euclidien, des traces de procédures de calculs préhelléniques, travaillant ainsi par l'amont.

I. Les calculs empiriques

Il est donc important, pour bien définir la notion de démonstration, de remonter aux mathématiques existant avant la période grecque classique.

Ceci est un extrait, retrouvez le document complet sur philopsis.fr