La démonstration

Deux études sur Frege : entre mathématiques et linguistique

François de Gandt

Philopsis : Revue numérique
https://philopsis.fr

I. L'explicitation totale des démonstrations

L'œuvre de Frege est très brève, incisive, quasi minérale en sa sobriété, comme une sorte d'aérolithe d'abord méconnu puis admiré, enfin commenté minutieusement et religieusement dans la deuxième moitié du XXe siècle. Pour lui faire droit, en manifester la force, l'originalité et la fécondité aux yeux de philosophes moins rompus aux exercices de la philosophie analytique, il paraît utile de retracer les liens étroits qui l'unissent aux mathématiques de son temps d'une part, et à la réflexion traditionnelle sur les langues d'autre part, entre mathématiques et linguistique. Les contours de la logique, ce territoire bien difficile à dessiner, en ressortiront peut-être plus nets.

Dans le vaste mouvement qui à la fin du XIXe siècle ébranle les bases mêmes des sciences mathématiques et oblige les penseurs à chercher un sol stable par delà les traditionnelles assurances de la géométrie euclidienne et de l'échafaudage des nombres, Frege occupe une place à part, très novateur et très archaïque à la fois. Attaché aux certitudes de l'intuition géométrique - pas question d'admettre une géométrie non-euclidienne à titre provisoire ou hypothétique, car « nul ne peut servir deux maîtres »[1]-, soucieux inlassablement de garantir une référence à toutes les expressions - pas question de jouer en irresponsable avec des écritures, comme une monnaie sans étalon or -, il creuse patiemment pour atteindre le sol logique, ce qu'il pense être le roc : les lois de la pensée pure, sur lesquelles pourraient se bâtir une part des constructions mathématiques.

Sur quoi repose la notion de nombre et comment peut-on justifier les opérations qu'on effectue sur eux ? L'objectif premier de Frege est l'arithmétique[2]. Décomposant les concepts de l'arithmétique et cherchant à en assurer les fondements, il se demande à quelles catégories de vérités appartient cette science :

> « Nous séparons toutes les vérités qui ont besoin de fondement en deux sortes : pour les unes la démonstration peut procéder de manière purement logique, pour les autres la démonstration doit s'appuyer sur des faits d'expérience »[3].

L'entreprise est d'abord, si l'on peut dire, généalogique : à quel titre une théorie est-elle recevable ? La démonstration doit permettre d'établir les titres d'une théorie, en remontant de proche en proche jusqu'au sol qui la fonde.

Démontrer, c'est exposer la transmission de la vérité d'une proposition à une autre plus éloignée, d'un principe à une conséquence. La conséquence est alors toute aussi vraie que le principe, et si le principe est fondé à son tour sur l'expérience, la conséquence partagera son statut de fait d'expérience. La démonstration permet de voir clairement les liens de dépendance entre des vérités (elle offre, écrit Frege, une *Einsicht in die Abhängigkeit der Wahrheiten*[4]). Le mathématicien, lui, va de l'avant, il recherche des théorèmes nouveaux, sa démonstration avance en direction de vérités nouvelles; ici on s'intéresse plutôt à la régression, la démonstration est un outil de mise à l'épreuve. On « poursuit la preuve régressivement jusqu'aux vérités originelles » (*den Beweis* [...] *bis auf die Urwahrheiten zurück zu verfolgen*)[5] .

La réussite de l'entreprise exige que l'on ait des démonstrations absolument sans rupture, que tout pas effectué soit entièrement explicite, que chaque passage d'une ligne de raisonnement à la suivante soit parfaitement justifié :

> « Si l'on a réussi à éviter scrupuleusement toute rupture dans la chaîne des raisonnements (*jede Lücke in der Schlusskette*), alors et alors seulement on peut dire en toute certitude sur quelles vérités originelles repose cette preuve »[6] .

On peut ainsi préciser quel est le socle premier d'une théorie, son droit à la validité, son « fondement », comme Frege l'expose dans la présentation de ses *Grundgesetze* de 1893 :

> « Grâce à l'absence de lacunes dans les chaînes déductives (*durch die Lückenlosigkeit der Schlussketten*) on parvient à ce que chaque axiome, chaque présupposé

1 Gottlob Frege, *Nachgelassene Schriften*, ed. H. Hermes, F. Kambartel, F. Kaulbach, Hambourg, Felix Meiner Verlag 1969, p. 183.

2 La thèse d'habilitation de Frege est intitulée "Méthodes de calcul basées sur une extension du concept de grandeur", et il raconte qu'il a étudié, avant la Begriffschrift, le concept de suite ordonnée, en tentant de le réduire au concept de consécution logique.

3 Frege, *Begriffschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle, Louis Nebert 1879, p. IX. On trouvera une traduction des premières pages dans *Logique et fondements des mathématiques, Anthologie 1850-1914,* Institut d'histoire et de philosophie des sciences et des techniques, sous la dir. de F. Rivenc et Ph. de Rouilhan, Paris Payot 1992, pp. 98-129.

4 Gottlob Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik*, Stuttgart, Ph. Reklam, 1987, § 2 p. 26. Voir la trad. de C. Imbert, Paris Le Seuil, 1969.

5 Ib., § 3, p. 27, trad. p. 127.

6 Ib., § 4, p. 28, trad. p. 128.

ou hypothèse ou comme on voudra les appeler, sur lesquels repose une démonstration, se trouvent amenés à la lumière; ainsi obtient-on un terrain solide pour décider de la nature épistémologique (*erkenntnistheoretisch*) de la loi démontrée. On a bien déclaré souvent que l'arithmétique n'est que de la logique un peu plus developpée (*nur weiter entwickelte Logik*); mais cette affirmation restait contestable tant qu'il subsistait dans les démonstrations des passages qui ne se produisaient pas selon des lois logiques reconnues, mais semblaient reposer sur une connaissance intuitive. C'est seulement une fois qu'on a décomposé ces passages en étapes logiques simples (*in einfache logische Schritte zerlegt*) que l'on peut se persuader qu'il n'y a rien d'autre au fondement que de la logique. J'ai assemblé (*zusammengestellt*) tout ce qui peut rendre plus facile de juger de la cohésion des chaînes déductives et de la solidité des assises de l'édifice (*Widerlager*). Si donc quelqu'un devait trouver un défaut (*etwas fehlerhaft*), il faut qu'il puisse indiquer précisément où se trouve à son avis la faute (*Fehler*) : dans les lois fondamentales, dans les définitions, dans les règles ou dans leur application à un endroit déterminé. Et si on trouve que tout est en ordre, alors on connaît ainsi précisément les fondements sur lesquels repose chaque théorème (*Lehrsatz*) particulier »[7].

Ce projet n'est pas nouveau, c'est celui même d'Euclide et de tous les mathématiciens :

« L'idéal d'une méthode scientifique rigoureuse pour les mathématiques, idéal que je me suis efforcé de réaliser ici et auquel on peut attacher le nom d'Euclide, voici comment j'aimerais le décrire. Que tout soit démontré, on ne peut l'exiger parce que c'est impossible; mais on peut demander que toutes les propositions (*Sätze*) dont on a besoin sans les démontrer soient expressément énoncées comme telles, afin que l'on puisse clairement reconnaître sur quoi repose l'édifice entier. Il faut ensuite s'efforcer de réduire le plus possible le nombre de ces lois fondamentales, en démontrant tout ce qui est démontrable. De plus, et en cela je vais au-delà d'Euclide, je demande que tous les modes de déduction et de consécution (*alle Schluss- und Folgerungsweisen*) qui sont utilisés soient introduits par avance (*vorher aufgeführt*). Sinon on ne peut être assuré d'avoir rempli la première exigence. Cet idéal je crois l'avoir atteint pour l'essentiel »[8] .

D'autres mathématiciens à la même époque ont un souci analogue d'exhaustivité dans la preuve, en particulier ceux qui s'occupent de géométrie. La discussion des géométries non-euclidiennes forçait à préciser, à rendre plus rigoureuses les démonstrations, et obligeait à expliciter les étapes les plus élémentaires. Jusqu'alors l'intuition spatiale, l'habitude quotidienne des concepts autorisaient des sauts de raisonnement dont on ne s'était même pas aperçu.

Moritz Pasch, dans ses *Leçons* de géométrie de 1882, revendique cette explicitation totale des preuves :

« Selon la conception générale, les théorèmes (*Lehrsätze*) doivent être des conséquences logiques des propositions prises comme noyau initial (*Kernsätze*). Mais on ne se rend pas toujours clairement conscients et explicites tous les moyens de démonstration que l'on utilise (*nicht immer bringt man sich alle benutzten Beweismittel ausdrücklich zum Bewusstsein*). Cela tient en partie à l'usage des figures, comme on l'a dit au § 6. Mais même quand on n'autorise aucune image sensible, fût-ce la représentation interne et consciente d'une image, même alors l'emploi de beaucoup de mots, ceux par lesquels sont désignés les concepts géométriques les plus simples, exerce déjà une certaine influence. Une partie des expressions avec lesquelles nous sommes familiarisés très tôt par les manipulations de la vie quotidienne se rencontrent aussi dans la

7 Gottlob Frege, *Die Grundgesetze der Arithmetik*, Hildesheim, Olms, 1966, p. VII (il n'existe pas de trad. française, on peut se reporter à la trad. anglaise de M. Furth, *The basic laws of artihmetic*, Berkeley, Univ. of California Press, 1967).

8 *Grundgesetze*, ib. p. VI.

science; lorsque nous employons ces expressions dans la vie quotidienne nous entremêlons avec nos pensées toutes sortes de relations entre ces concepts, sans que nous nous en rendions compte à chaque fois, de même il n'est pas facile dans une science rigoureuse d'écarter totalement les contaminations inconscientes (*unbewussten Beimischungen*). Ce sont justement ces contaminations qu'il faut porter en pleine lumière si l'on veut connaître l'étendue véritable des fondements sur lesquels repose l'édifice de la géométrie »[9].

C'est seulement à ce prix que le statut des diverses géométries pourra être clarifié :

> « Quel rôle joue dans l'édifice théorique chacun des concepts et des relations, jusqu'à quel point ils sont nécessaires ou superflus pour l'ensemble, cela ne peut apparaître clairement que dans une présentation absolument rigoureuse. C'est seulement lorsque l'on a assemblé de cette manière les constituants essentiels, lorsque ceux qui sont superflus ont été écartés, que l'on conquiert le sol approprié à des discussions générales sur la géométrie »[10].

L'effort de Pasch, qui sera poursuivi par Hilbert en 1899, a consisté en une explicitation des relations d'ordre entre les points d'une droite (le point A est "entre" les points B et C, etc.) ou entre les droites d'un « faisceau » issues d'un même point, des relations d'incidence entre droites et points (le point A « est sur » la droite g; les droites f et h ont un point commun ou « se coupent », etc.). Il formule notamment un axiome qui portera son nom : si une droite coupe un côté d'un triangle, elle doit couper aussi un deuxième côté du triangle. Cette sorte de fait était jusqu'alors admise sans justification et même sans discussion.

Lorsqu'au cours d'un raisonnement on ressent le besoin d'un recours à l'intuition spatiale, c'est précisément le signe que la démonstration est lacunaire, ou que les principes sont insuffisants[11]. Pour décrire cette élimination systématique de l'intuition, Pasch formule ses exigences d'une manière que Frege n'aurait pas acceptée, en demandant que la démonstration soit indépendante du « sens » des concepts :

> « Si la géométrie doit être véritablement déductive, il faut que la déduction soit partout indépendante du sens des concepts géométriques, comme il faut qu'elle soit indépendante des figures ; on n'a le droit de prendre en considération que les relations entre les concepts géométriques qui ont été stipulées (*niedergelegt*) dans les propositions et les définitions que l'on utilise. Certes au cours de la déduction il est permis et il est utile, mais nullement nécessaire, de penser à ce que dénotent les concepts géométriques dont on parle ; par suite, lorsque cela s'avère nécessaire, il en résulte que la déduction est lacunaire (*die Lückenhaftigeit der Deduktion*) ou même dans certains cas, que les propositions posées au départ comme moyens de preuve sont insuffisantes »[12].

Tout dépend de ce que l'on entend par « le sens des concepts » et par « penser à ce que dénotent les concepts ». S'il s'agit des associations intuitives automatiques suggérées par les mots ou les pensées, alors il faut les écarter. Mais, aurait dit ici Frege - et il le dira à Hilbert- ce serait absurde de tenter d'utiliser des signes sans rien qui leur corresponde. La géométrie n'est pas un jeu avec des signes

Une autre divergence essentielle apparaît entre Frege et les mathématiciens de son temps (dont Pasch est un représentant éclairé) : Pasch propose d'expliciter tous les *Beweismittel*, les moyens de preuve, mais il pense d'abord aux étapes de nature topologique et ne dit rien des modes d'inférence, des règles, principes ou lois qui permettent la progression des

9 Moritz Pasch, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Berlin 1976, 1ère éd. 1882, § 12, p. 91

10 Pasch, ib., p. 92.

11 Pasch nomme ces principes *Kernsätze*, propositions-noyaux, et il y voit l'énoncé de faits d'expérience élémentaires.

12 Pasch, ib., p. 90.

démonstrations[13]. Frege, lui, se fait gloire d'aller au delà d'Euclide - et au delà des mathématiques de son temps - : même les lois logiques doivent être formulées au début, et leur usage réglé, pour qu'on sache précisément quand et comment on les applique, et que le fil de la démonstration soit présenté sans coupure[14].

13 Dans son appendice aux *Vorlesungen* de Pasch, Max Dehn évoque un parallélisme entre l'intuition géométrique et l'intuition logique. Les Anciens ont ressenti les étapes de raisonnement topologiques comme aussi nécessaires pour la pensée que les règles logiques - et donc requérant aussi peu une formulation expresse - : « La formulation des présupposés topologiques manque complètement chez Euclide, surtout ceux que l'on désigne aujourd'hui comme axiomes d'ordre. On y utilise aussi tacitement le fait qu'un cercle de même rayon qu'un autre, avec son centre situé sur la circonférence de l'autre, possède un point commun avec lui. Toutes ces propositions sont utilisées inconsciemment, ou plutôt ressenties comme tout aussi nécessaires pour la pensée que ce qu'on appelle le mode de raisonnement logique (*als ebenso denknotwendig empfunden, wie die sogenannte Schlussweise*) ». (Max Dehn, *Die Grundlegung der Geometrie in historischer Entwicklung*, Anhang à Pasch *Vorlesungen über neuere Geometrie,* Berlin 1976, 1ère éd. 1926, p. 250). En somme : les règles logiques vont de soi, elles « vont sans dire », on a cru longtemps qu'il en allait de même des axiomes topologiques.

14 Même Peano, dans ses *Arithmetices principia* de 1889, ne formule pas les lois logiques qu'il utilise (voir les commentaires introductifs de J. van Heijenoort in *From Frege to Gödel*, Cambridge, Harvard Univ. Press, 1967, p. 84).